

(1556)

(B786)

$$f(x,y) = x^2 y (x-y-1) = x^3 y - x^2 y^2 - x^2 y$$

$$\text{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y - 2xy^2 - x^2 \\ x^3 - 2x^2 y - x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy(3x-2y-2) = 0 \\ x^2(x-2y-1) = 0 \end{cases}$$

Falls $x=0$: $y \in \mathbb{R}$ beliebig

Falls $x \neq 0$: Falls $y=0$: $\Rightarrow x-2y-1=0 \Rightarrow \underline{x=1}$

Falls $y \neq 0$: $\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y-2=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 2y + 1$$

$$\Rightarrow 3(2y+1) - 2y - 2 = 4y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = -\frac{1}{4}}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}}$$

Stationäre Punkte: $(0,y), y \in \mathbb{R}, (1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Hesse-Matrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - 2y^2 - 2y & 3x^2 - 4xy - 2x \\ 3x^2 - 4xy - 2x & -2x^2 \end{pmatrix}$

* $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$: $H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\det H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8} > 0$ Satz Seite G-29 $\Rightarrow H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ negativ definit

Satz G-28
 $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

G.W.

$$* \underline{(1,0)}: H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3-2 \\ 3-2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(1,0) = -1 \neq 0 \Rightarrow H_f(1,0) \text{ indefinit}$$

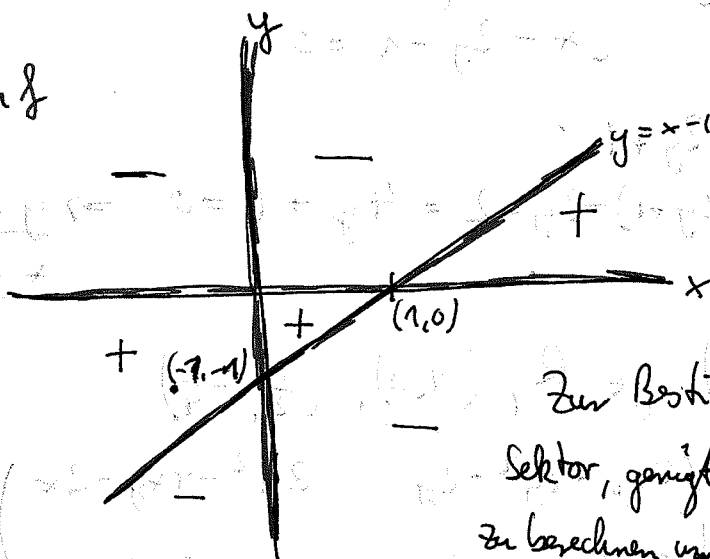
$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei (1,0)

$$* \underline{(0,y)}: H_f(0,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 - 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det H_f(0,y) = 0 \Rightarrow$ Hesse-Matrix hilft zur Bestimmung des Typus des stat. Punktes nichts!

Skizze und Vorzeichen der Funktion $f(x,y) = x^2 y (x-y-1)$

rot $\hat{=}$ Nullstellen von f



Beachte:

$$x - y - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow y < x - 1$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens in jedem Sektor, genügt es, einen Testpunkt im Sektor zu berechnen und dessen Vorzeichen zu bestimmen, z.B. $f(-1, -1) = -1 \cdot (-3) = +3$

Falls $y > 0$: $(0,y)$ ist Maximum

Falls $-1 < y < 0$: $(0,y)$ ist Minimum

Falls $y < -1$: $(0,y)$ ist Maximum

Falls $y = 0$: $(0,0)$ Sattelpunkt

Falls $y = -1$: $(0,-1)$ ist Sattelpunkt