Name: ____________________ Matrikelnummer: ____________

Prüfung aus Mathematik A für Elektrotechnik
02. 02. 2007
Stoffsemester: WS 2006/2007
Pool A

---

1. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v_1} = (1 \;\; 2 \;\; -1)^t, \quad \vec{v_2} = (-1 \;\; 3 \;\; 5)^t.$$

   (a) Finden Sie einen Vektor $\vec{v_3}$ aus $\mathbb{R}^3$, sodass $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet. Zeigen Sie für den gefundenen Vektor $\vec{v_3}$, dass $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$ ist. (3 Pkt.)

   (b) Projezieren Sie den Vektor $\vec{w} = (1 \;\; 2 \;\; 3)^t$ auf den von $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ aufgespannten Untervektorraum. (4 Pkt.)

2. Berechnen Sie die Partialburchdarstellung von (5 Pkt.)

$$\frac{4x^4 + 3x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}.$$

3. Bestimmen Sie folgenden Grenzwert: (4 Pkt.)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

.

4. Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen: (6 Pkt.)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \arctan(n^2)\Big)^{n/2} \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{\pi})}{5^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1000)}{117n^2 + 11n + 1003}.$$

5. Diskutieren Sie die Funktion (10 Pkt.)

$$f(x) = e^{-\frac{|x|}{2(x+1)}}.$$

   Gefragt sind: *Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Differenzierbarkeit, lokale Extrema, Wendepunkte, Randverhalten, Monotonie, Skizze.*

6. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung! (8 Pkt.)

   (a) Eine Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ besitzt immer ein globales Extremum oder einen Wendepunkt.

   (b) Eine stetige, differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$ besitzt immer ein Extremum.

   (c) Es gibt ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß es genau drei Lösungen gibt.

   (d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $A\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen besitzt.

   (e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist $Bild(f)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

   (f) Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann zwei verschiedene Häufungspunkte besitzen.

Alle Zwischenschritte sind anzugeben!

Name: ____________________ Matrikelnummer: ____________

Prüfung aus Mathematik A für Elektrotechnik
02. 02. 2007
Stoffsemester: WS 2006/2007
Pool B

---

1. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v_1} = (1 \;\; 2 \;\; -1)^t, \quad \vec{v_2} = (-1 \;\; 3 \;\; 5)^t.$$

   (a) Finden Sie einen Vektor $\vec{v_3}$ aus $\mathbb{R}^3$, sodass $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet. Zeigen Sie für den gefundenen Vektor $\vec{v_3}$, dass $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$ ist. (3 Pkt.)

   (b) Projezieren Sie den Vektor $\vec{w} = (1 \;\; 2 \;\; 3)^t$ auf den von $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ aufgespannten Untervektorraum. (4 Pkt.)

2. Berechnen Sie die Partialburchdarstellung von (5 Pkt.)

$$\frac{4x^4 + 3x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}.$$

3. Bestimmen Sie folgenden Grenzwert: (4 Pkt.)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

.

4. Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen: (6 Pkt.)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \arctan(n^2)\Big)^{n/2} \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{\pi})}{5^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1000)}{117n^2 + 11n + 1003}.$$

5. Diskutieren Sie die Funktion (10 Pkt.)

$$f(x) = e^{-\frac{|x|}{2(x+1)}}.$$

   Gefragt sind: *Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Differenzierbarkeit, lokale Extrema, Wendepunkte, Randverhalten, Monotonie, Skizze.*

6. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung! (8 Pkt.)

   (a) Eine Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ besitzt immer ein globales Extremum oder einen Wendepunkt.

   (b) Eine stetige, differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$ besitzt immer ein Extremum.

   (c) Es gibt ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß es genau drei Lösungen gibt.

   (d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $A\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen besitzt.

   (e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist $Bild(f)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

   (f) Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann zwei verschiedene Häufungspunkte besitzen.

Alle Zwischenschritte sind anzugeben!