Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

Prüfung aus Mathematik A für Elektrotechniker
11. 04. 2008
Stoffsemester: WS 2007/2008

Pool A

---

1. Gegeben seien die drei Vektoren (9 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (2,\,-1,\,0,\,2)^t, \quad \vec{v}_2 = (3,\,-6,\,1,\,9)^t, \quad \vec{v}_3 = (0,\,9,\,-2,\,-12)^t.$$

   (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums U, der von den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ aufgespannt wird. Welche Dimension besitzt U?

   (b) Projezieren Sie den Vektor $\vec{p} = (1, 0, 1, -1)^t$ auf U.

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Man betrachte (7 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ in Abhängigkeit vom Parameter α.

3. (a) Überprüfen Sie folgende Reihen auf ihr Konvergenzverhalten: (5 Pkt.)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2-1) + 2^{n/2}}{n!}$$

   (b) Überprüfen Sie die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ihr Konvergenzverhalten: (4 Pkt.)

$$a_n = \cos(n^2+1) \cdot \frac{\ln(n^5+2)}{n+2} + \arctan\Big(\frac{e^n}{n^{10}+1}\Big)$$

4. Diskutieren Sie die Funktion (10 Pkt.)

$$f(x) = e^{x+1} \cdot (x^2 + 2|x|).$$

   Gefragt sind: *Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Differenzierbarkeit, lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Verhalten für $x \to \pm\infty$.*

5. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung! (5 Pkt.)

   (a) Jeder Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Limes der Folge.

   (b) Seien A, B $n \times n$-Matrizen mit $\det(A) = \det(B) \neq 0$. Dann ist die Matrix $A \cdot B$ invertierbar.

   (c) Wenn die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^d$ linear abhängig sind, so ist $\vec{v}_{k+1}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ darstellbar.

   (d) Sei $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(2)$. Dann besitzt f in $(0;2)$ ein Minimum oder Maximum.

   (e) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

ALLE ZWISCHENSCHRITTE SIND ANZUGEBEN!

1) $\vec{v}_1 = (2, -1, 0, 2)$

$\vec{v}_2 = (3, -6, 1, 9)$

$\vec{v}_3 = (0, 9, -2, -12)$

a) $\vec{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+0+4}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1 $\qquad \vec{y}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{y}_2{}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{6+6+18}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{10}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/3 \\ -8/3 \\ 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ 1 $\qquad \vec{y}_2{}' = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -11/3 \\ -8/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{121}{9} + \frac{64}{9} + \frac{9}{9} + \frac{49}{9}}} \begin{pmatrix} -11/3 \\ -8/3 \\ 1 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{243}}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ 1 $\qquad \vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{243}}\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{y}_3{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{243}}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{243}}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} - \frac{-9-24}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-72-6-84}{243}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} + \frac{11}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{y}_3{}'$

$\Rightarrow$ ONB $= \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ 1 $\qquad$ $\dim U = 2$ 1

b) $\vec{p} = (1, 0, -1, +1)$

$\text{Proj}_U(\vec{p}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{243}}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{243}}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ Ansatz: 1

$= \frac{2+2}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-11-3+7}{243}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/9 \\ -4/9 \\ 0 \\ 8/9 \end{pmatrix} + \frac{7}{243}\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{243}\begin{pmatrix} -293 \\ -164 \\ 21 \\ 265 \end{pmatrix}$ 1.5

bei B: $\frac{1}{243}\begin{pmatrix} 265 \\ -293 \\ -164 \\ 21 \end{pmatrix}$

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 3 & -2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 2 & -1-\alpha & 1-\alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\alpha & -\frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 2 & -1-\alpha & 1-\alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\alpha & -\frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 0 & -1-\alpha+\frac{4}{3}\alpha & 1-\alpha+\frac{4}{3}\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\alpha & -\frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 0 & -1+\frac{\alpha}{3} & 1+\frac{\alpha}{3} \end{array}\right) \quad 2$$

$$-1+\frac{\alpha}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Falls $\alpha = 3$: $1+\frac{\alpha}{3} = 4 \neq 0 \Rightarrow Rg(A,b) = 3 > 2 = Rg(A,b)$

Fallunterscheidg. 1 — keine Lösung! 1

Falls $\alpha \neq 3$: $z = \dfrac{1+\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}-1} = \dfrac{\alpha+3}{\alpha-3} \overset{\text{in B}}{=} z$ 1

$$y = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha z = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha\frac{\alpha+3}{\alpha-3} = \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-3} - \frac{\alpha-3}{\alpha-3}\right) = \frac{2}{3}\alpha\frac{6}{\alpha-3} \overset{\text{in B}}{=} x$$ 2

$$x = \alpha + y - \alpha z = \alpha + \frac{2}{3}\alpha\frac{\alpha+3}{\alpha-3} - \frac{2}{3}\alpha - \alpha\frac{\alpha+3}{\alpha-3}$$

$$= \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}\frac{\alpha+3}{\alpha-3} \overset{\text{in B}}{=} y$$ 1

$$= \frac{\alpha}{3}\left(\frac{\alpha-3}{\alpha-3} - \frac{\alpha+3}{\alpha-3}\right) = \frac{\alpha}{3}\frac{-6}{\alpha-3}$$

---

5 e) a) FALSCH: $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ 2 HPe, kein Limes

a) b) RICHTIG: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \Rightarrow A \cdot B$ invertierbar

b) c) FALSCH: z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) d) RICHTIG: Satz von Rolle

d) e) FALSCH: z.B. $x \mapsto |x|$

in B

③ a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2-1)+2^{n/2}}{n!}$ (1,5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^2-1)+2^{n/2}}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n/2}}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 2^{n/2}}{n!}$$

<u>QK:</u> $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}}{\frac{2\cdot 2^{n/2}}{n!}} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\, n!}{2^{n/2}\,(n+1)!}$ (1) $\displaystyle = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \longrightarrow 0$ (1)

<u>Ansatz</u> ($\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ <u>Reihe absolut konvergent!</u> (1)

b) $$a_n = \underbrace{\underbrace{\cos(n^2+1)}_{(\frac{1}{2})\ \in[-1,+1]}\ \underbrace{\frac{\ln(n^5+2)}{n+2}}_{\to 0}}_{\to 0\ (\frac{1}{2})} + \underbrace{\arctan\Big(\underbrace{\frac{e^n}{n^{10}+1}}_{\to\infty}\Big)}_{\to \frac{\pi}{2}\ (1)}$$

($\frac{1}{2}$) ~~[illegible]~~

(e steigt stärker als jedes Polynom)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^5+2)}{n+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5+2}}{1} = 0 \ (1)$$

<u>$\lim a_n = \frac{\pi}{2}$</u> ($\frac{1}{2}$)

(4) $f(x) = e^{x+1}(x^2+2|x|) = \begin{cases} e^{x+1}(x^2+2x) & \text{für } x \geq 0 \\ e^{x+1}(x^2-2x) & \text{für } x<0 \end{cases}$

Betrag auflösen: $\frac{1}{2}$

* Def'bereich: $D(f) = \mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$
* Stetigkeitsbereich: $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$ (Komposition stetiger Funktionen
* Nullstellen: $x \geq 0$: $x^2+2x=0 \iff x=0$ oder $[x=-2]$

  $x<0$: $x^2-2x=0 \iff x=0$ oder $[x=2]$

  einzige Nullstelle: $x=0$ $\frac{1}{2}$
* Diff'barkeit: $x \geq 0$: $f'(x) = e^{x+1}(x^2+2x) + e^{x+1}(2x+2) = e^{x+1}(x^2+4x+2)$ $\frac{1}{2}$

  $x<0$: $f'(x) = e^{x+1}(x^2-2x) + e^{x+1}(2x-2) = e^{x+1}(x^2 \cancel{} -2)$ $\frac{1}{2}$

  diff'bar bei $x=0$? $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 2e \neq -2e = \lim_{x \to 0-} f'(x)$

  nicht diff'bar bei $x=0$ $\frac{1}{2}$
* Extreme: $x \geq 0$: $f'(x)=0 \iff x^2+4x+2=0 \iff x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} < 0$

  $\Rightarrow$ keine Extreme $\frac{1}{2}$

  $x<0$: $f'(x)=0 \iff x^2 \cancel{} -2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$

  Extremum bei $x=-\sqrt{2}$ Vorzeichenwechsel "+" $\to$ "−": Maximum $\frac{1}{2}$

  $x=0$: Minimum wegen Vorzeichenwechsel 1. Ableitung! 1
* 2. Ableitung: $x \geq 0$: $f''(x) = e^{x+1}(x^2+4x+2) + e^{x+1}(2x+4) = e^{x+1}(x^2+6x+6)$ $\frac{1}{2}$

  $x<0$: $f''(x) = e^{x+1}(x^2 \cancel{} -2) + e^{x+1}(2x \cancel{}) = e^{x+1}(x^2+2x-2)$ $\frac{1}{2}$

~~Typ Extr.~~
* Wendepunkte: $x \geq 0$: $f''(x)=0 \iff x^2+6x+6=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = -3 \pm \sqrt{3} < 0$ $\Rightarrow$ keine WP $\frac{1}{2}$

  $x<0$: $f''(x)=0 \iff x^2+2x-2=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$ $\frac{1}{2}$

  WP bei $x=-1\pm\sqrt{3}$ wegen Vorzeichenwechsel! $\frac{1}{2}$

  $x=0$: $\lim_{x \to 0-} f''(x) < 0$, $\lim_{x \to 0+} f''(x) > 0$ WP bei $x=0$ $\frac{1}{2}$
* Randverhalten: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\frac{1}{4}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\frac{1}{4}$
* Monotonie: wachsend in $(-\infty, -2-\sqrt{6}), [0, \infty)$ $\frac{1}{4}$

  fallend in $[-2-\sqrt{6}, 0]$ $\frac{1}{4}$