$\boxed{\text{Bsp 5}}$ $\int \frac{3}{3x^2+9x+6}\,dx.$

Quadratische Ergänzung:

→ Verfahren in der Mathematik um quadratische Fkt auf die Form von Binomischen Formel zu bringen. Mit diesem Verfahren können Nullstellen berechnet werden.

→ Quadratische Gleichung

$$3x^2+9x+6=0 \quad |:3$$

Bringe die Gleichung auf die Normal Form. Das bedeutet, dass vor x^2 eine 1 stehen muss.

$$\Rightarrow \boxed{x^2+3x+2=0}$$

Bringen die einzelne Zahl auf die andere Seite der Gleichung: $x^2+3x=-2$

1. Binomische Formel $\Big\}$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

→ Auf die linke Seite der Gleichung $x^2+3x=-2$ probieren wir jetzt die 1. Binomischen Formel zu bekommen:

$$a^2+2ab+b^2$$

$$x^2+3x+?$$

$x=a$ $\quad 2x\cdot b=3x \Rightarrow$

$$b=\frac{3}{2} \Rightarrow b^2=\frac{9}{4}$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=-2+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x+\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

$$x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2-1\right]$$

Elementarintegral: $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{artanh} x+C$

$$\int\frac{3}{3x^2+9x+6}\,dx=\int\frac{1}{x^2+3x+2}\,dx=$$

$$=4\int\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2-1}\,dx=4\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{y^2-1}\,dy \ \textcircled{=}$$

Subst: $\displaystyle\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=y \Rightarrow x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2} \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dy$

$y=2x+3$

$$\textcircled{=}\ -2\int\frac{1}{1-y^2}\,dy=-2\operatorname{artanh} y+C=$$

$$-2\operatorname{artanh}(2x+3)+C$$

PBZ $\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \Rightarrow 1=A(x+2)+B(x+1)$

$x=-1 \Rightarrow A=1$

$x=-2 \Rightarrow -1=+B$

$$\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx=\int\frac{1}{x+1}\,dx-\int\frac{1}{x+2}\,dx=\ln|x+1|-\ln|x+2|$$

$$=\ln\frac{|x+1|}{|x+2|}+C$$

$$\operatorname{artanh} z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

$$-2\operatorname{artanh}(2x+3)=\frac{-2}{2}\ln\frac{2x+4}{-2x-2}=-1\cdot\ln\frac{x+2}{-x-1}=$$

$$= \ln\left(\frac{x+2}{-x-1}\right)^{-1} = \ln\frac{-x-1}{x+2} = \ln\frac{|x+1|}{|x+2|} + C$$

⑥ $\int \sqrt{2x^2+4x-2}\, dx$

Quadratische Ergänzung von $2x^2+4x-2=0 \mid :2 \Rightarrow$

$x^2+2x-1=0 \Rightarrow x^2+2x = 1 \Rightarrow$

$a^2+2ab+b^2$

$x=a \quad 2ab=2x \Rightarrow b=b$

x

$$x^2+2x+1 = 1+1 \Rightarrow (x+1)^2 = 2 \Rightarrow (x+1)^2-2=0$$

$$2x^2+4x-2 = 2\left((x+1)^2-\sqrt{2}^2\right) = 4\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2-1\right] =$$

$$\int\sqrt{2x^2+4x-2}\,dx = 2\int\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\,dx = 2\sqrt{2}\int\sqrt{y^2-1}\,dy \; ⊜$$

Subst $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = y \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dy$

$$⊜\; 2\sqrt{2}\int y'\sqrt{y^2-1}\,dy \underset{P.I}{=} 2\sqrt{2}\left(y\sqrt{y^2-1} - \int \frac{y\cdot\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{y^2-1}}\,dy\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(y\sqrt{y^2-1} - \int\frac{y^2-1+1}{\sqrt{y^2-1}}\,dy\right) \Rightarrow$$

$$2\sqrt{2}\int\sqrt{y^2-1}\,dy = 2\sqrt{2}\,y\sqrt{y^2-1} - 2\sqrt{2}\int\sqrt{y^2-1}\,dy - 2\sqrt{2}\int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\cancel{4}_{2}\sqrt{2}\int\sqrt{y^2-1}\,dy = \cancel{2}\sqrt{2}\,y\sqrt{y^2-1} - \cancel{2}\sqrt{2}\,\operatorname{arcosh} y + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{2x^2+4x-2}\,dx = \sqrt{2}\,y\sqrt{y^2-1} - \sqrt{2}\operatorname{arccosh} y + C =$$

$$= \cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+1}{\cancel{\sqrt{2}}}\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2-1} - \sqrt{2}\operatorname{arccosh}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \quad ✓$$

(7) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin t \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ $\quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos t \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix}$

Bogenlänge $\quad L = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt$

Bogenlängefunktion $\quad s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{x}}(r)\|\, dr$

$s(0) = 0 \quad ; \quad s(2\pi) = L$

$s : [0, 2\pi] \longrightarrow [0, L]$

$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cos^2 t + \frac{1}{8}\sin^2 t + \frac{1}{16}\cos^2 t} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$s(t) = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{2}}\, dr = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, r \Big|_0^t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, t$

Inverse FKt $\quad : \quad [0, L] \longrightarrow [0, 2\pi]$

$$\boxed{t = 2\sqrt{2} \cdot s}$$

$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin 2\sqrt{2}\, s \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos 2\sqrt{2}\, s \\ \frac{1}{4} \sin 2\sqrt{2}\, s \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{x}}(s) =$