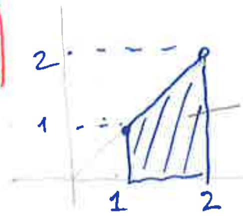
F. INTEGRATION

F1. DAS BESTIMMTE INTEGRAL

★ **Motivation** : $f(x) = x$, $f : [1,2]$

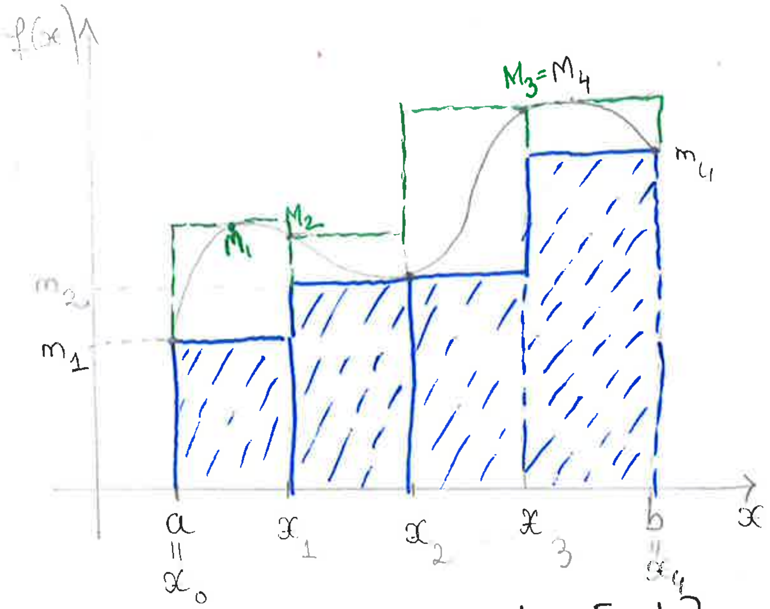


Fläche $= \frac{3}{2}$

$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$

(A) OBER- UND UNTERSUMMEN

- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. auf $[a,b]$. Gesucht: der Flächeninhalt F zwischen Graph und x-Achse?



- Zerlegen das Interval $[a,b]$ in n Teilintervale:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \to \text{eine Zerlegung } Z$$

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2] \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

In jedem Intervall, suchen wir den "Kleinsten" und "größten" Funktionswert:

$$m_1 = \inf_{x \in [x_0, x_1]} f(x) \quad \ldots \quad m_n = \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

$$M_1 = \sup_{x \in [x_0, x_1]} f(x) \qquad M_n = \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

Wir schätzen den Flächeninhalt F von oben und von unten ab.

- Von unten: errichte auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein Rechteck der Höhe m_k $\Rightarrow$

$$F = \text{gesuchte Fläche} \geq \underbrace{\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{m_1}_{\text{Höhe}}}_{\text{1. Rechteck}} + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \dots (x_n - x_{n-1}) m_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, m_k = U(Z,f) \text{ (Untersumme)}$$

- Von oben : Höhe M_k statt m_k

$$F = \text{gesuchte Fläche} \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k = O(Z,f)$$

Obersumme

- Je nach Anzahl und nach Wahl der n Teilintervalle ergeben sich unterschiedliche O- und U- summen. mit $U(Z,f) \leq O(Z,f)$.

Also gilt : $U(Z,f) \leq F \leq O(Z,f)$, $\forall$ Zerlegungen $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow s = \sup\{U(Z,f) \mid \text{Zerlegungen}\} \leq F$$

$$\leq \inf\{O(Z,f) \mid \text{Zerlegungen } Z\} = S$$

Def: Gilt $\boxed{s = S}$ so heißt f auf $[a,b]$ (Riemann-) integrierbar und wir nennen

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := s = S}$$

das Integral von f auf $[a,b]$; $f(x)$ heißt Integrand.

bestimmtes Integral

! Falls $s < S$ → es kann kein Flächeninhalt definiert werden.

Bsp. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x \text{ irrationale Zahl} \\ 1 , & x \text{ rationale Zahl} \end{cases}$$

<u>f ist nicht integrierbar</u>:

Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ beliebige Zerlegung von $[0,1]$

• für alle k, im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$

$\begin{cases} m_k = 0 \\ M_k = 1 \end{cases}$, da jedes Teilintervall mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl enthält.

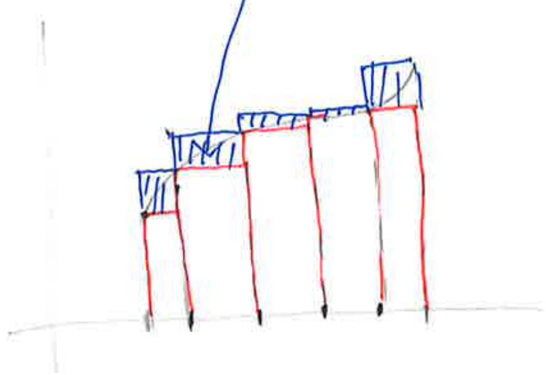
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} U(Z,f) = 0 \\ O(Z,f) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s = \sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung}\} = 0 \\ S = \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung}\} = 1 \end{array}$$

$s < S \Rightarrow f$ nicht integrierbar

Satz [Riemann Integrabilitätskriterium] (*)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f über $[a,b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$, eine Zerlegung Z_ε von $[a,b]$ gibt mit

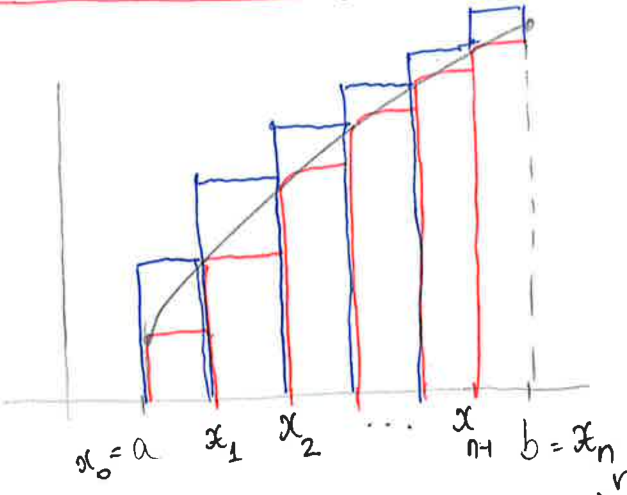
$$\boxed{O(Z_\varepsilon, f) - U(Z_\varepsilon, f) < \varepsilon}$$



$\forall \varepsilon \; \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$ und eine Zerlegung Z_n in n Teilintervalle $O(Z_n,f) - U(Z_n,f) < \varepsilon$

Satz: $\boxed{\text{Sei } f \text{ mon. wachsend und beschränkt auf } [a,b]. \text{ Dann ist } f \text{ integrierbar.}}$

Beweis: Anwendung Satz (*) Seite 3



Sei $\varepsilon > 0$; und zerlege $[a,b]$ in n äquidistante Intervalle

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots\ldots [x_{n-1}, x_n]$, von Länge $\boxed{x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}}$

$x_0 = a$, $x_n = b$

$\Rightarrow$ Zerlegung Z_n

Untersumme (mit rot): $U(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{\frac{b-a}{n}} \cdot f(x_{k-1})$

Obersumme: $O(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{\frac{b-a}{n}} f(x_k)$

Wie groß muss man n wählen $(n > n_\varepsilon)$, i.e $n_\varepsilon = ?$

so daß $\boxed{O(Z_n, f) - U(Z_n, f) < \varepsilon}$?

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \right]}_{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{(b-a)}{n} \left(f(b) - f(a) \right) \overset{?}{<} \varepsilon \Rightarrow \quad n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon} = n_\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ integrierbar ✓

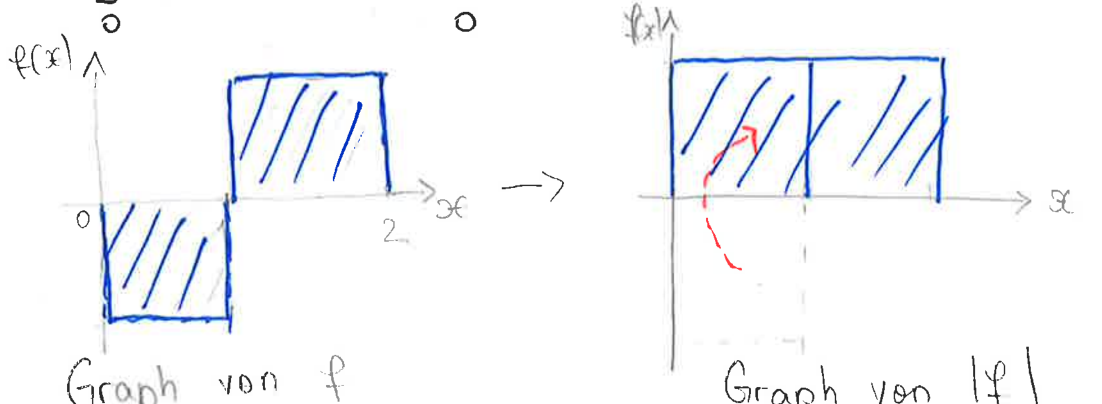
Satz: $\boxed{\text{Jede auf } [a,b] \text{ stetige Fkt ist integrierbar.}}$

Bemerkung: Will man wirklich den Flächeninhalt, so ist bei negativen Funktionswerten der Graph in diesen Bereichen an der x-Achse zu spiegeln, d.h $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ist der gesuchte Flächeninhalt.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Es gilt: $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$. Der Flächeninhalt ist aber

$$\int_0^2 |f(x)|\,dx = \int_0^2 1\,dx = 2$$



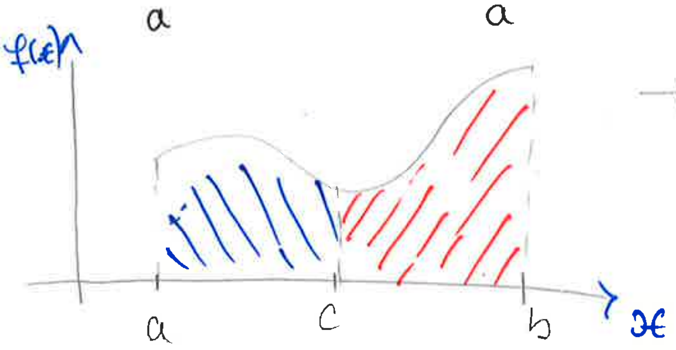
Graph von f $\longrightarrow$ Graph von $|f|$

(B) ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN VON INTEGRALE

1. $\boxed{\text{ADDITIVITÄT}}$: Sei $a \le c \le b$. Es gilt

- f auf $[a,b]$ integrierbar $\Leftrightarrow$ f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



$\to$ Der Integrationsbereich kann in 2 Teile aufgeteilt werden und die einzelnen Int. addieren sich zum ursprünglichen Integral.

Bemerkung: bisher $\int_a^b f(x)\,dx$ war nur für $a<b$ definiert.

Zusätzlich gilt es:

(i) $a>b$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(ii) $a=b$: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

2. TRANSLATIONSINVARIANZ

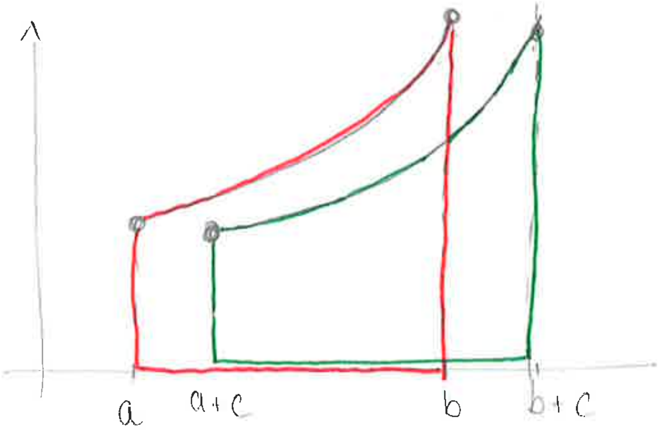
→ Verschieben $f(x)$ parallel zur x-Achse!

→ Wie verhalten sich Integrale?

$x \in [a,b] \Rightarrow$

$x + c \in [a+c, b+c]$

$f'(a+c) = f(a)$



Satz: $\forall c \in \mathbb{R}$ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx}$

$y = x - c$; $dy = dx$

$y = a + c \Rightarrow x = a$

$y = b + c \Rightarrow x = b$

$\Rightarrow \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$

3. LINEARITÄT

Sei f, g auf $[a,b]$ integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$, $f+g$ und $f-g$ sind auf $[a,b]$ integrierbar und:

(i) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b \left(\lambda f(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

4. PRODUKT

Sind f und g integrierbare Fkt. über $[a,b]$, dann ist $f \cdot g$ auch integrierbar.

5. MONOTONIE DES INTEGRALS

(i) Falls $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ und f integrierbar in $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(ii) Sind f, g integrierbar auf $[a,b]$ und $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) Sei f integrierbar und beschränkt auf $[a,b]$, d.h. $\exists$ m und M mit $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Dann

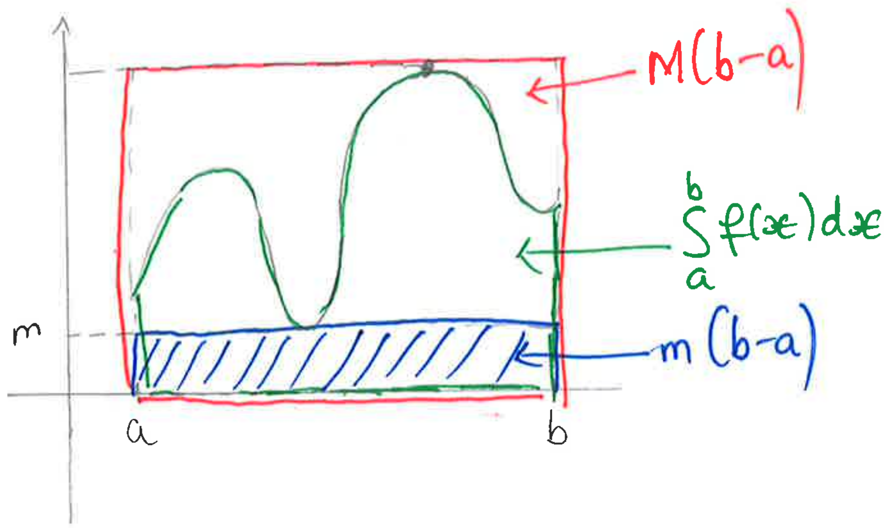
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$$ → Siehe Bild unten

(iv) "Dreiecksungleichung für Integrale"

Ist f auf $[a,b]$ integrierbar dann auch $|f|$, und

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

5 (iii)



Ⓒ MITTELWERTSÄTZE DER INTEGRALRECHNUNG

Satz 1 [Verallgemeinerter MWS der Integralrechnung]

Sei $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f stetig und $g \geq 0$ integrierbar. Dann $\exists$ ein $c \in [a,b]$ so daß

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx}$$

Beweis - Skizze: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f integr. und nimmt min und max in $[a,b]$ an. Sei

$$\left.\begin{array}{l} m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \\ M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m\, g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq M\, g(x) \Rightarrow$$

(*) $\Rightarrow \boxed{m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx} \quad : \int_a^b g(x)$

Fall 1: $g(x) = 0 \Rightarrow$ Beweiß fertig $\to$ trivial

Fall 2: $g(x) > 0$

(*) : $\int_a^b g(x) \Rightarrow m \leq \mu \leq M$ mit

$$\boxed{\mu = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)}} = f(c)$$

MWS für stetige Fkt: f nimmt jeden Wert zwischen m und M an $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b] : f(c) = \mu \Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)}$$

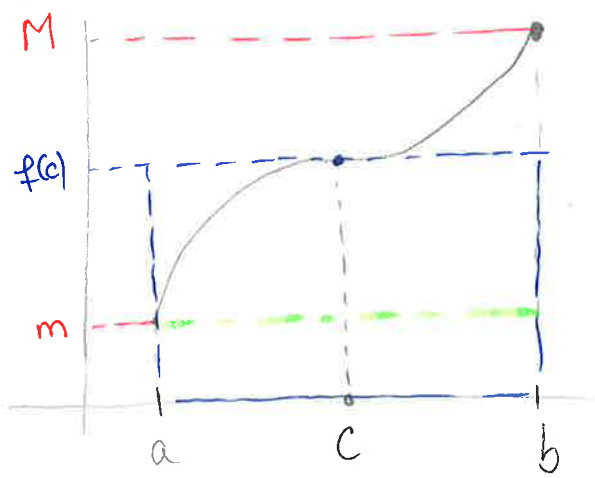
$\square$

Satz 2 [MWS DER INTEGRALRECHNUNG]

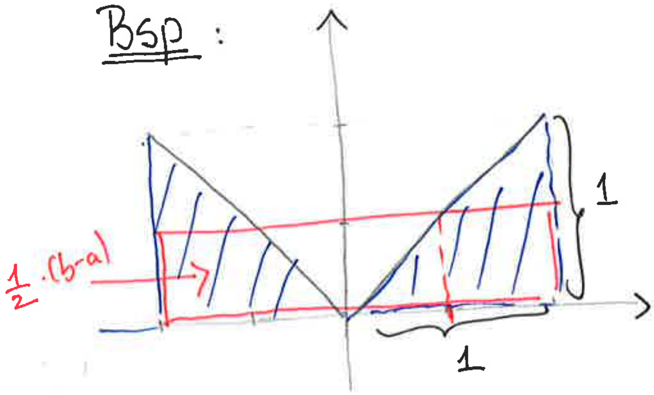
Ist f stetig im $[a,b]$, dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Beweis: $g(x) = 1$, im Satz 1



Bsp:



$f(x) = |x|$

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ = Fläche $= 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

f positiv

$c = ?$ so dass $\underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}_{1} = c\,(b-a)$

$= c\,(1-(-1)) \Rightarrow 1 = 2c \Rightarrow$

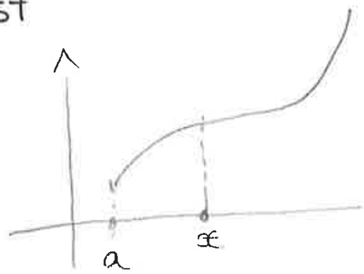
$\boxed{c = \frac{1}{2}}$

F2 UNBESTIMMTE INTEGRALE

Satz 1: Ist $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ auf jeden Teilintervall $[a, x]$ beschränkt und integrierbar, dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine stetige Funktion von x.



Satz 2: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ def. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, dann ist F diff'bar in jedem Punkt $x \in [a,b]$ wo f stetig ist und es gilt dort

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

! f stetig auf $[a,b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

! Ist $F'(x) = f(x)$ so heißt $F(x)$ Stammfunktion oder unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx$ von x.

! Ist F eine Stammfkt. von f, so erhält man alle Stammfkt von f, wenn man eine beliebige Konstante C zu f addiert.

Def: Die Menge aller Stammfkt, d.h. die Menge aller Fkt., die $f(x)$ als Ableitung besitzen, nennt man das unbestimmte Integral von $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \text{mit } F'(x) = f(x)$$

Satz: Seien F, G Stammfkt von f. Dann ist $F - G$ Konstant

Beweis: $F'(x) = f(x)$

$G'(x) = f(x)$

$F'(x) - G'(x) = \underbrace{\left(F(x) - G(x)\right)}_{h(x)}' = 0 \quad \to h'(x) = 0 \Rightarrow h = \text{Konst.}$

Bsp: Sei $f(x) = \sin x$

Stammfkt $F(x) = ?$: $F'(x) = f(x)$

Da $(\underbrace{-\cos x}_{F(x)})' = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfkt.

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Bsp: $f(x) = 2x$

Stammfkt = jede Fkt mit Ableitung $2x$

$F(x) = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C$

$$\boxed{\text{UMKEHRUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL}}$$

$$\int F'(x) \, dx = F(x) + C \iff \int \frac{dF(x)}{dx} \, dx = F(x) + C$$

$$\left(\int f(x) \, dx\right)' = f(x) \iff \frac{d}{dx}\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfkt von f. Dann

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$\boxed{\text{Beweis}}$: Sei $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad ; \quad G(a) = 0 \quad ; \quad G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dann ist $G(x)$ stetig, $G'(x) = f(x) \Rightarrow G \to$ Stammfkt von f

- F auch Stammfkt $\Rightarrow$ $F(x) - G(x) = c$ (Konstante)

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$G(a) = 0$$

$\square$

Bemerkungen

a) Satz ermöglicht bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfkt (unbestimmte Integrale) zu berechnen.

b) Stammfkt $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ kann man aus den Regeln für Ableitungen gewinnen!

c) Jede stetige Fkt hat eine Stammfkt; manchmal ist es aber schwiereg (z.B $\int \frac{e^x}{x}\,dx$) eine solche durch bekannte Fkt auszudrücken.

Tabelle unbestimmte Integrale Seite F20 - 21 sollte man sich merken!

F3. INTEGRATIONSMETHODEN

Erinnerung: Diff. rechnung

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

Satz: Sind f und g stetige Fkt auf $I \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx} \quad (+c)$$

Beweis

$F \to$ Stamm-f-Kt von f : $F(x) = \int f(x)\, dx + C_1$

$G \to$ g $G(x) = \int g(x)\, dx + C_2$

$\Rightarrow$ $\alpha F \to$ Stammfkt von αf $\alpha F(x) = \int \alpha f(x) dx + C_1$

$\beta G \to$ " — " — βg $\beta\, G(x) = \int \beta g(x) dx + C_2$

$\Rightarrow$ $\alpha F + \beta G \to$ Stammfk von $\alpha f + \beta g$

$\Rightarrow$ $\underbrace{(\alpha F + \beta G)(x)}$ = $\alpha F(x) + \beta G(y) = \int$

$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$

$\square$

(A) PARTIELLE INTEGRATION

Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow fg' = (f \cdot g)' - f'g$$

Satz: Sei f, g stetig diff'bar. (auf I). Dann gilt

$$\boxed{\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx}$$

oder $\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$

$I = [a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

P.I : sinnvoll, wenn g aus g' leicht auszurechen ist, und $\int f'(x)g(x)\,dx$ leichter zu lösen ist als $\int f(x)g'(x)\,dx$.

Bsp: $\boxed{1}$ $\int \underbrace{9x^2}_{f'(x)}\,\underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx = 3x^3 \cdot \ln x - \int 3x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$f'(x) = 3 \cdot \underbrace{(3x^2)}_{(x^3)'} = (3x^3)' \Rightarrow f(x) = 3x^3$

$= 3x^3 \ln x - \int 3x^2\,dx = 3x^3 \ln x - x^3 + C$

Bsp $\boxed{2}$ Prüfung 2/07/2018

$I = \int \underbrace{e^x}_{f'}\,\underbrace{\sin x}_{g}\,dx = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{f'} \cos x\,dx =$

$= e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right] = e^x(\sin x - \cos x) - I \Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

B INTEGRATION DURCH SUBSTITUTION

• Erinnerung: Kettenregel Diff. rechnung

f, G stetig diff'bar, mit $g = G'$ ($\Leftrightarrow$ $G \to$ Stammfkt von g) und $H := G \circ f \Rightarrow H(x) = (G \circ f)(x) = G(f(x))$

$$\boxed{H'(x) = \left(G(f(x))\right)' = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)}$$

(*) → integrieren

SUBSTITUTIONSREGEL:

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $g: f(I) \to \mathbb{R}$ stetig

unbestimmt: $\boxed{\int g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = G(f(x)) + c}$ G Stammfkt von g

bestimmtes Integral (i)

$$\int_a^b g(f(x))\, \underbrace{f'(x)\, dx}_{dy} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy = G(y)\Big|_{f(a)}^{f(b)} + c$$

Subs: $f(x) = y \Rightarrow f'(x)\, dx = 1\, dy$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dy} y$$

Integrationsgrenzen

$x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$

$x = b \Rightarrow f(x) = f(b)$

(ii) Substitution in unbestimmten Integral

$$\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int g(y)\, dy = G(y) \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{G(f(x)) + c}}$$

Rücksubst

$f(x) = y$; $f'(x)\, dx = dy$

Bsp: (1) $\underbrace{\int \frac{\ln x}{x}\,dx}_{\text{unbestimmt}} = \int \frac{y}{\cancel{e^y}} \cdot \cancel{e^y}\,dy = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

$\frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow \boxed{dx = e^y dy}$

Subst $\ln x = y \Rightarrow x = e^y \Rightarrow 1 \cdot dx = e^y \cdot dy$

Bestimmtes Integral: $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\ln x = y$: $x = 1 \Rightarrow \ln x = \ln 1 = 0$

$x = e \Rightarrow \ln x = \ln e = 1$

---

(2) $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^y\,dy = e^y \xrightarrow{\text{Rück}} e^{x^3} + c$

Subst: $x^3 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow$

$3x^2 dx = dy$

UMKEHRFUNKTION

(3) $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,dx$ $=$

Subst: $\sqrt{1+x} = y \to$ Umkehrfkt: $1+x = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ 2+x = y^2+1 \end{cases}$

$\frac{dx}{dy} = 2y \Rightarrow dx = 2y\,dy$

$= \int \frac{1}{(y^2+1)\cdot \cancel{y}} \cdot 2\cancel{y}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = 2 \arctan y + C$

$= 2 \arctan \sqrt{1+x} + c$

SPEZIALFÄLLE DER SUBSTITUTIONSREGEL

(*) ABLEITUNG DER NENNERS IM ZÄHLER

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'.bar , $f(x) \neq 0 \ \forall x$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C \\ &\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|\Big|_a^b \end{aligned}}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow f'(x)\,dx = dy$$

Bsp: (1)

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}\,dx = \ln(x^3+2x+1)\Big|_0^1$$

$$= \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

(*) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff' bar.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \int f'(x)\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2 + C \\ &\text{(ii)} \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C \end{aligned}}$$

$(f(x) > 0, \forall x)$

Zu (i) $f(x) = y \Rightarrow f'(x)\,dx = dy \Rightarrow \int f'(x)\,f(x)\,dx =$

$$= \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{f(x)^2}{2} + C$$