# $\boxed{G}$ FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

Allgemein: $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

## Spezielle Fälle

- $\boxed{n=1}$ $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ : $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

  Raumkurven in $\mathbb{R}^m$

- $\boxed{m=1}$ $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : $\vec{f}(x_1, x_2 \ldots x_n)$

  $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

  reelwertige Fkt. in. mehrere Variablen.

- $\boxed{m=n=2}$ Vektorfeld. (Kraftfeld, Fluß)

## $\boxed{G1}$ Reelwertige Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ = Skalarfelder

- Reelwertige Fkt von n variablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

  Schreibweise: $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

  $D$ = Definitionsbereich

  $\mathbb{R}$ = Bildbereich ; $f(D) \rightarrow$ Bild von $f$

- $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Pkt $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ (bzw. Vektor) des Def. bereich in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu.

$\underline{n=2}$ : $f(x,y)$ statt $f(x_1,x_2)$ } übliche Schreibweise.
$\underline{n=3}$ : $f(x,y,z)$ statt $f(x_1,x_2,x_3)$ }

$\boxed{n=2}$ : $f(x,y)$ beschreibt eine Fläche im Raum $\mathbb{R}$.

durch $\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y)=z \;,\; (x,y)\in D\}}_{\subset \mathbb{R}^{n+1}}$

Graph von $f$

<u>Vorteilhaft</u> : $f$ auf gezielt gewählten Teilbereichen von $D$ zu Untersuchen.

n=2

<u>Zum Beispiel</u> :

<u>Höhenschichtlinien</u> (<u>oder Niveaumengen</u>) $N_c$ oder <u>Höhenlinie</u> von $f$ =

Kurven wo $f$ Konstant ist.

- $$\boxed{N_c = \{(x,y)\in D \mid f(x,y)=c\}}$$
- Man nennt $f(x,y)=c$ implizite Gleichung dieser Kurve
- Ist $f(x,y)=c$ explizit nach $y$ auflösbar in der form $y=h(x,c)$ => explizite Darstellung der Niveau-Kurve (Schnittkurve der Fkt. graphen mit Ebene $z=c$)

$\boxed{\text{Bsp (1)}}$ $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$ $D=\mathbb{R}^2$

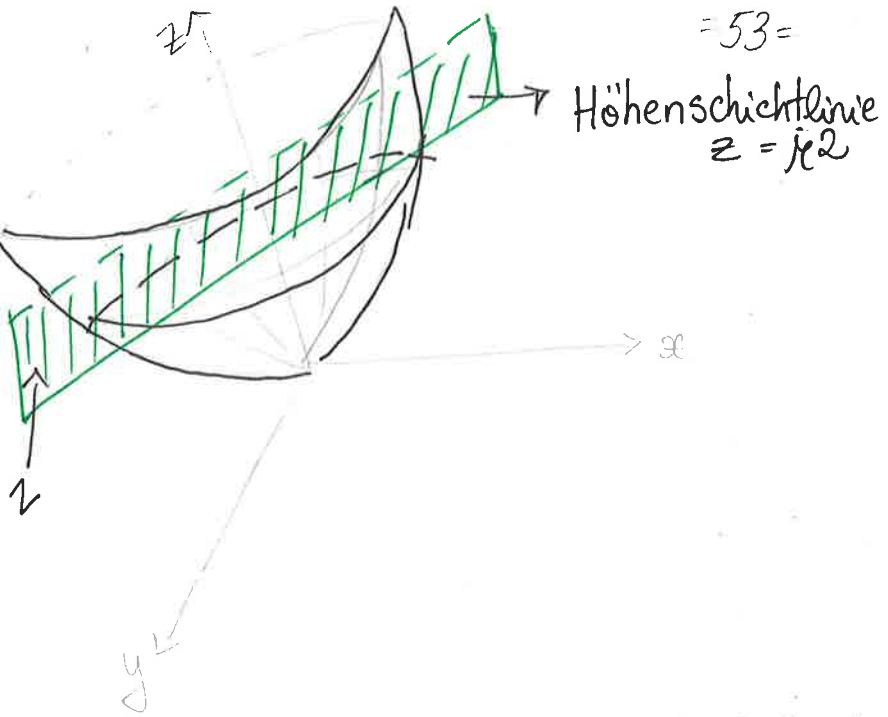
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ; Graph von $f$

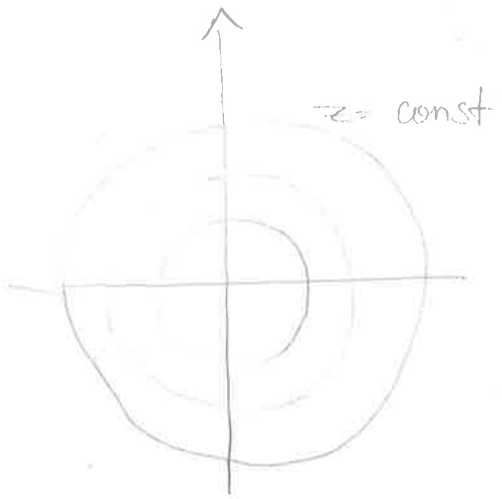
$$G_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad z=f(x,y)\}$$

$$N_{r^2} = G_f \cap \{z=r^2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=r^2\}$$

$\downarrow$ Kreis radius $r$ $\boxed{N_{r^2}\subseteq\mathbb{R}^2}$

<u>Implizite Gleichung</u> : $x^2+y^2=r^2$




- Explizite Gleichung : nicht durch eine einzige Fkt. darstellbar:
  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ , $-r \leq x \leq r$.

# G2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT

Erinnerung (Kapitel D, Mathe A)

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ; $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Abstand zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, oder Norm von $\vec{x} - \vec{y}$ :

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Def: 1) Offene Kugel im $\mathbb{R}^n$, mit Mittelpunkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$

$$\boxed{\underbrace{U_r(\vec{a})}_{r\text{-Umgebung von } \vec{a}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}}$$

r - Umgebung von $\vec{a}$.

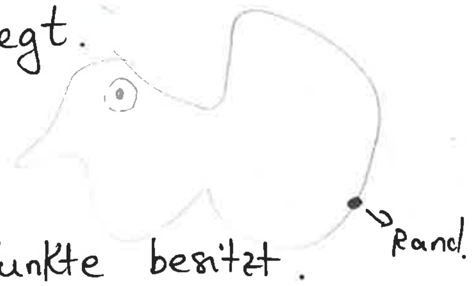
$n = 1$ : $U_r(a)$ = offenes Interval $(a-r, a+r)$

$n = 2$ : $U_r(\vec{a})$ = {Punkten der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\vec{a}$}

$n = 3$ $U_r(\vec{a})$ → Kugel im $\mathbb{R}^3 \setminus$ {Oberfläche}

**Def:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(a) $\vec{a} \in D$ heißt <u>innerer Punkt</u>, wenn es eine offene Kugel mit Mittelpunkt $\vec{a}$ gibt, die ganz in $D$ liegt.



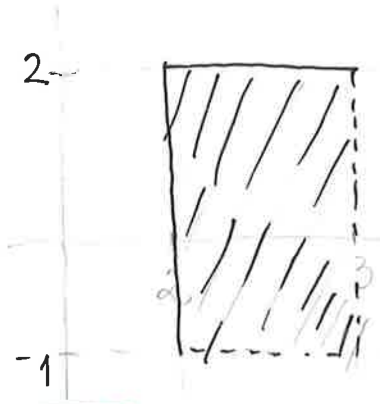

(b) $D$ = offene Menge, wenn $D$ nur innere Punkte besitzt.

(c) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Randpunkt von $D$</u>, wenn jede Kugel um a sowohl Punkte von $D$ und nicht von $D$ enthält.
Rand von $D = \partial D$.

(d) $D$ = <u>abgeschlossene Menge</u>, wenn $D$ alle ihre Randpunkte enthält

<u>Bemerkung</u>: Es gibt Mengen die weder offen noch abgeschlossen sind.

<u>Bsp</u>(2) Das Rechteck in $\mathbb{R}^2$
$$Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x < 3 \,,\, -1 < y \le 2 \}$$




- Alle Punkte $(x,y)$ mit $2 < x < 3$, $-1 < y < 2$ } innere Punkte
- Rand von $Q$ enthält Pkt. die zu $Q$ gehören (z.B $(2,y)$ : $-1 < y \le 2$) aber auch Pkt. $\notin Q$ (z.B $(x,-1)$ : $2 \le x \le 3$)

**Def:** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in D \cup \partial D$.

a) $f$ hat in <u>$\vec{a}$ den Grenzwert</u> $c \in \mathbb{R}$, schreibweise
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c, \quad \left(\text{oder } f(\vec{x}) \to c \text{ für } \vec{x} \to \vec{a}\right)$$
wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$ eine offene Kugel um a $U_\delta(\vec{a})$ gibt, sodaß $\forall\, \vec{x} \in D \cap U_\delta(\vec{a})$ gilt: $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$

(b) $f$ heißt stetig in $\vec{a} \in D$, wenn $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ ist.

Das heißt: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \forall \vec{x} \in D : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow$

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$$

(c) $f$ heißt stetig auf $D$, wenn $f$ in allen Punkten von $D$ stetig ist

**Beispiele**

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ ; Grenzwert in $(0,0)$ ? $\exists$ oder nicht.

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

$\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{xy^2}{2xy}\right| = \dfrac{1}{2}|y| \to 0$, wenn $(y \to 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ ; $f$ nicht stetig ; $f$ nicht def in $(0,0)$

**Satz:** Es gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c \Longleftrightarrow$ Für alle Folgen $(x_n, y_n) \neq (a,b)$ mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = c$$

(*) Analoge Formulierung für mehr als 2 Variablen.

**Bsp (4)** Sei $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\quad \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = ?$

Wir nähern uns auf 2 Arten

Sei $(x_n, y_n) \to (0,0)$ mit $y_n = c \cdot x_n \Rightarrow$

$g(x_n, y_n) = \dfrac{c^2 x_n^3}{x_n^2 + c^4 x_n^4} \to 0$, $x_n \to 0$

Aber für $y_n \to 0$ und $x_n = c y_n^2$

$g(c y_n^2, y_n) = \dfrac{c}{c^2+1} \not\to 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existiert nicht

• Bei allen Annäherungen das gleiche Resultat soll entstehen.

**Vektorfelder:** $\boxed{\text{Allgemeiner } \vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{a} \in D \cup \partial D$.

**Def.:**

(a) $\vec{f}$ hat in $\vec{a}$ Grenzwert $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = c \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(x_1, \dots, x_m) = c_j$

$\forall j = 1, \dots, m$

(b) $\vec{f}$ stetig in $\vec{a}$ wenn jede der Fkt $f_j$ in $\vec{a}$ stetig ist.

(c) $\vec{f}$ stetig in $D$, wenn $\vec{f}$ in allen Punkten von $D$ stetig ist.

**Satz:** ( ! $\boxed{\text{nicht auf dem Tafel}}$ → Skript G-5)

(a) Die Projektionen: $P_i^0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad P^0(x_1, \dots, x_n) = x_i^0$, $i = 1, \dots, n$.
sind stetig.

(b) Summen und (Skalar)-Produkte stetiger Fkt. sind stetig.
D.h. sind $\vec{f}, \vec{g} : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ stetig in $\vec{a} \in D$, dann
sind auch $\vec{f} + \vec{g} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle : D \to \mathbb{R}^m$ stetig,

wobei $\vec{f} + \vec{g} = \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ \vdots \\ f_m + g_m \end{pmatrix}$ ; $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_m g_m$

(c) Der Quotient zweier stetiger, reelwertiger Fkt. ist stetig, wenn der Nenner $\neq 0$ ist.

(d) Die Verknüpfung stetiger Fkt. ist stetig, D.h:

Ist $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to E \subseteq \mathbb{R}^m$ stetig in $\vec{a}$, und $\vec{g}: E \to \mathbb{R}^k$ stetig in $\vec{f}(\vec{a})$, dann ist $\vec{g} \circ \vec{f}: D \to \mathbb{R}^k$ stetig in $\vec{a}$, wobei
$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})).$$

**Bsp**: (5) Polynome $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j \to$ stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(6) Das Vektorfeld
$$\vec{f}(x,y) = \frac{1}{xy} \begin{pmatrix} e^{x/y} \\ \ln(x+y) \end{pmatrix}$$
ist auf
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0, x+y > 0\}$$
stetig

## G.3 PARTIELLE ABLEITUNGEN

**Def**: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ innerer Punkt. Existiert die Ableitung der partiellen Funktion
$$x_i \longmapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$
an der Stelle $\boxed{x_i = a_i}$, so nennt man sie partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$ an der Stelle $\vec{a}$, oder im Punkt $\vec{a}$.

Schreibweise: $\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}}$ oder $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})}$ oder $\boxed{f_{x_i}(\vec{a})}$

Also:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[ f(x_1, \dots, x_i + t, \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \right]$$

- Falls in $\vec{a}$ alle partiellen Ableitungen existieren, so heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Nabla Operator

der Gradient von $f$ in $\vec{a}$.

**Def** • $f$ heißt partiell diff'bar wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

• Falls $\nabla f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in D$ existiert, $\Rightarrow$

$\vec{x} \longmapsto \operatorname{grad} f(\vec{x}) \longrightarrow$ Vektorfeld.

! Der Gradient $\nabla f(\vec{x}_0, y_0)$ steht senkrecht auf der Niveaulinie $f(x,y) = f(x_0, y_0)$

$\perp$

**Beispiele**

(1) $f(x,y) = x^2y^3 + y\ln x$

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + \frac{y}{x}$

$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + \ln x$

(2) $f(x,y) = x^2y + x\sin y + x^y$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + \sin y + y\,x^{y-1} \\ x^2 - x\cos y + x^y \ln x \end{pmatrix}$$

(3) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ; $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$

(4) $f(x,y) = x^y$ ; $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y\,x^{y-1} \\ x^y \ln(x) \end{pmatrix}$

Potenzfunktion

# G4. RICHTUNGSABLEITUNGEN

- Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ geben die momentane Änderung der Funktionswerte in Richtung der Koordinatenachsen (d.h. in $e_i$-Richtung) an. Es wäre unvernünftig, sich auf diese Richtungen einzuschränken. $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

**Def:** Zu ~~jedem~~ jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\|\vec{v}\| = 1$ nennen wir den Grenzwert

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})\right]}$$

(sofern er existiert) die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $\vec{x} \in D$ in Richtung $\vec{v}$ (längs $\vec{v}$)

= Anstieg von $f$ an der Stelle $\vec{x}$ längs $\vec{v}$.

$$\begin{cases} \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \text{ nimmt in Richtung } \vec{v} \text{ zu} \\ \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \text{ nimmt in Richtung } \vec{v} \text{ ab} \end{cases}$$

**Satz:** Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}$ ein innerer Punkt von $D$. Falls $\nabla f$ in einer Kreisscheibe $U_r(\vec{x}) \subseteq D$ existiert und stetig ist, so gilt für jede Richtungsableitung in $\vec{x}$

$$\boxed{\underbrace{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x})}_{f_{\vec{v}}(\vec{x})} = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{x}) \rangle}$$

Insbesondere: falls $\nabla f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ so ist $\frac{1}{|\nabla f(\vec{x})|} \nabla f(\vec{x})$ die Richtung der größten Richtungsableitung.

(= größten Veränderung = größten Anstiegs).

**Bemerkung:** Bei Fkt. mit einer Variable gibt die Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle $x_0$ an, wie sich der Fktswert verändert, wenn wir von dieser Stelle ein wenig "nach links" oder "nach rechts" gehen.

- Wenn wir mehrere Var. haben, können wir uns nicht nur in die $x$-Richtung nach "links" oder nach "rechts" im Koordinatensystem bewegen, sonder auch in andere Richtung.

**Bsp:** $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$

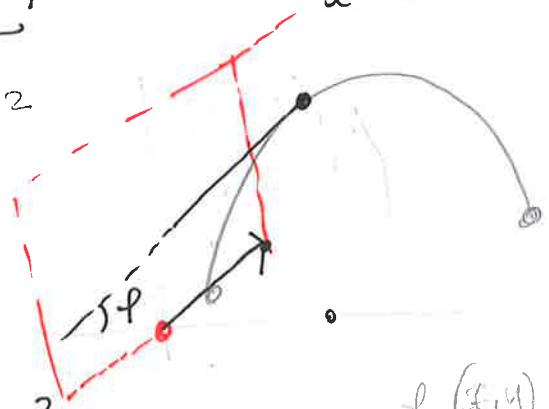
$f_x(1,2) = ?$

- $y \to$ fest halten

$f(x,y) = \underbrace{(9-y^2)}_{c} - x^2 \Rightarrow f_x(x,y) = -2x \; ; \; f_x(1,2) = -2$

$g(x) = c - x^2$

$-2 = \tan(\varphi)$




$f_x(x,y) = \langle (1,0), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = -2x$

$f_y(x,y) = \langle (0,1), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = -2y$

$\vec{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in \mathbb{R}^2$

$\|\vec{v}\| = 1$

$f_{\vec{v}}(1,2) = ?$

$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

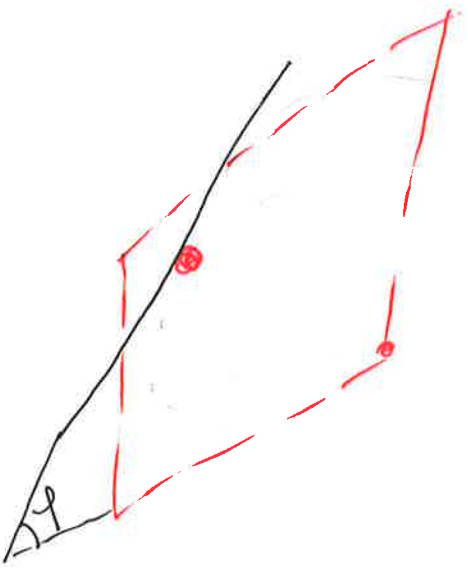
$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\partial_{\vec{v}} f(1,2) = \langle \vec{v}, \nabla f(1,2) \rangle = \langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-6}{\sqrt{2}}$

$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} x - \frac{2}{\sqrt{2}} y$

Schneide $G_f$ mit Ebene $\to$ parallel zu $z$-Achse ist durch die Gerade $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



# G4. TOTALE DIFFERENTIERBARKEIT

Bsp: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , (x,y) \neq 0 \\ 0 & , (x,y) = 0 \end{cases}$

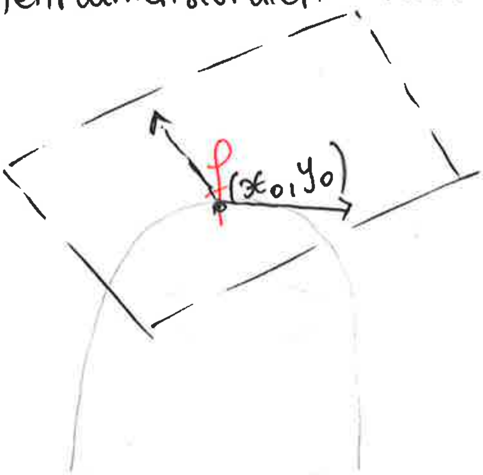
- Im $(0,0)$ $f$ ist nicht stetig $\Rightarrow$ nicht
- Richtungsableitung in $(0,0)$ in Richtung $(a,b)$

$$\partial_{(a,b)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[f\big((0,0)+t(a,b)\big) - f(0,0)\Big] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{ta\, t^2b^2}{t^2a^2+t^4b^4}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{ab^2}{a^2+t^2b^4} =$$

$$= \partial_{(a,b)} f(0,0) = \langle (a,b), \nabla f(0,0)\rangle = \begin{cases} \dfrac{b^2}{a} & , a \neq 0 \\ 0 & , a = 0 \end{cases}$$

ist im $(0,0)$ nicht stetig.

$\Rightarrow$ Bemerkung: Die Differenzierbarkeit in alle Richtungen ist nicht die richtige Erweiterung der Diff'keit von ein- zum mehrdimensionalen Fall. $\rightarrow$ totale Diff'barkeit eingeführt.




## Gleichung der Tangentialebene

Ebene durch $f(x_0,y_0)$
$\rightarrow$ Richtung gegeben durch $f_x(x_0,y_0)$ und $f_y(x_0,y_0)$

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Tangentialebene der Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$

- Diese Ebene soll in der Nähe von $(x_0,y_0)$ die Fläche $f(x,y)$ approximieren.

**Def:** Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0$ ein innerer Punkt von $D$. Dann heißt $f$ in $\vec{x}_0$ (total) differentierbar, wenn $f$ in $\vec{x}_0$ partiell diff'bar ist (also $f_{x_i}(\vec{x}_0)$ existiert, $\forall i = 1, \dots n$) – und wenn gilt:

$$(*) \quad \boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = 0}$$

$(*)$ = Differentierbarkeitsbedingung

Tangentialebene an $f$ im Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ist gegeben durch:

$$\boxed{z = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}$$

- Entsteht $f$ durch Einsetzen diff'baren Fkt einer Variablen ineinander, ist $f$ überall (total) diff'bar, wo $f$ definiert ist.

**Satz**
(1) Ist $f$ in $\vec{x}_0 \in D$ total diff'bar, dann ist $f$ stetig
(2) $\vec{x}_0$ innerer Punkt von $D$. Falls $\nabla f$ in eine Kugel $U_r(\vec{x}_0)$ existiert & stetig $\Rightarrow$ $f$ ist in $\vec{x}_0$ (total) diff'bar
(3) Folgerung aus (2) $f$ ist total diff'bar (auf $D$) wenn die partiellen Ableitungen stetig sind (auf $D$)

**Def:** $f$ heißt stetig diff'bar wenn die partiellen Ableitungen stetig sind.

**Bsp:** Tangentialebene an $f(x,y) = x^y$ im Punkt $(1,3)$

$$z = f(1,3) + \left\langle \begin{pmatrix} f_x(1,3) \\ f_y(1,3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x - 2$$

$$f_x(x,y) = y x^{y-1} \qquad f(1,3) = 1^3 \qquad \begin{pmatrix} f_x(1,3) \\ f_y(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_y(x,y) = x^y \ln x$$

**F: Wie untersucht man eine Fkt f auf (totale) differentierbarkeit?**

Ist $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im $\vec{x}_0$ (total) diff-bar?
Man kann folgendermaßen vorgehen.

Ist $f$ in $\vec{x}_0$ stetig — Nein → $f$ nicht diff-bar in $\vec{x}_0$.

↓ Ja

Ist $f$ partiell diff-bar in $\vec{x}_0$? — Nein → $f$ nicht diff-bar in $\vec{x}_0$.

↓ Ja

Existieren die partiellen Ableitungen von $f$ in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ und sind sie in $\vec{x}_0$ stetig — Ja → $f$ diff-bar in $\vec{x}_0$

↓ Nein

Ist $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \nabla f(x_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\| x - x_0 \|} = 0$ ?

Ja → $f$ diff-bar in $\vec{x}_0$

Nein → $f$ nicht diff-bar in $\vec{x}_0$

! Ist $f$ in $\vec{x}_0$ (total) diff-bar $\Rightarrow$ $f$ hat in $\vec{x}_0$ eine Tangentialebene gegeben durch:

$$z = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle$$

**Bsp:** Sei $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ist $f$ total diff-bar?

- Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
  $f(x,y)$ ist aus diff'baren Fkt. zusammengesetzt, und Nenner $\neq (0,0)$ für $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f$ (total) diff'bar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- $(x,y) = (0,0)$

$\boxed{\text{Ist } f \text{ in } (0,0) \text{ stetig?}}$

Ja

- $f$ in Polarkoordinaten: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\sin r}{r} = 1 = f(0,0) \Rightarrow f$ stetig in $(0,0)$

$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{\sin r}{r}$

$\boxed{\text{Ist } f \text{ in } (0,0) \text{ partiell diff'bar}}$ $\exists\, f_x(0,0)$ und $f_y(0,0) = ?$

Ja

$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2} = 0$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\sin y}{y} - 1}{y} = 0$

$\boxed{\text{Sind die partiellen Ableitungen von } f \text{ in } (0,0) \text{ stetig?}}$

Nein

$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \neq 0 \Rightarrow f_x$ in $(0,0)$ nicht stetig

$$\boxed{\text{Ist } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0\ ?}$$

Ja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\sin r}{r}-1}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin r - r}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos r - 1}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{\overbrace{-\sin r}^{0}}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>$f$ ist in $(0,0)$ (total) diff'bar</u>