G5 Die Kettenregel

Satz

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar (part. Ableitungen stetig)
und $\vec{x}: I \xrightarrow{\subseteq\mathbb{R}} D$ eine Kurve in Kurve in $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,
$t \in I \subseteq \mathbb{R}$
die <u>glatt</u> ist ($x_i(t)$ sind alle stetig diff'bar).

Dann gilt :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{f(\vec{x}(t))}_{g(t)} &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &= f_{x_1}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + f_{x_2}(\vec{x}(t))\, \dot{x}_2(t) + \dots + f_{x_n}(\vec{x}(t))\, \dot{x}_n(t) \\ &= \langle \nabla f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle \end{aligned}}$$

<u>Speziell</u> : $n = 2$ $\quad f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), x_2(t)) = f_{x_1}(\vec{x}(t))\, x_1'(t) + f_{x_2}(\vec{x}(t))\, x_2'(t)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_{x_1}(x(t)) \\ f_{x_2}(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

Die Kettenregel benötigt man immer dann, wenn neue Variable eingeführt werden, und die partiellen Abl. in bezug auf diese Variablen zu berechnen sind

Bsp 1 Sei $f(x,y) = x^2 + 2xy$

Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

$$g(t) = f(\underbrace{x(t), y(t)}_{\vec{x}(t)}) = (\cos t)^2 + 2 \cos t \sin t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}(t))\, y'(t) =$$

$$= \big(2x(t) + 2y(t)\big) \cdot x'(t) + \big(2x(t)\big)\, y'(t) =$$

$$= (2\cos t + 2\sin t)(-\sin t) + 2\cos t \cos t =$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t \quad - 2\sin t \cos t$$

Nach einsetzen: $f(\vec{x}(t)) = \cos^2 t + 2\cos t \sin t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2\cos t \sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t) =$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - 2\sin t \cos t$$

Allgemeiner Kettenregel:

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar Fkt von $(x_1, \ldots, x_n)$.
Weiters seien die Koordinatenfkt g_i von
$\vec{g} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to D \subset \mathbb{R}^n$: $\vec{g}(t_1, \ldots, t_m) = \begin{pmatrix} g_1(t_1, \ldots, t_m) \\ \vdots \\ g_n(t_1, \ldots, t_m) \end{pmatrix}$
stetig diff'bar. Dann ist die Zusammengesetzte Fkt. $\boxed{F = f \circ \vec{g} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$$F(t_1, \ldots, t_m) = f\left(g_1(t_1 \ldots, t_m), \ldots \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_m)\right)$$

$$= f\left(\vec{g}(t_1, \ldots, t_m)\right)$$

auf E auch stetig diff'bar und

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1, \ldots, g_n) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial t_j}}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Koordinatenwechsel: → **Polar Koordinaten in der Ebene**

$f(x, y)$ wird durch $\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}$ in $F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ übergeführt.

$F_r = ?$ $\qquad F_r = \left\langle \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \right\rangle$

$F_\varphi = ?$ $\qquad F_\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{pmatrix} \right\rangle$

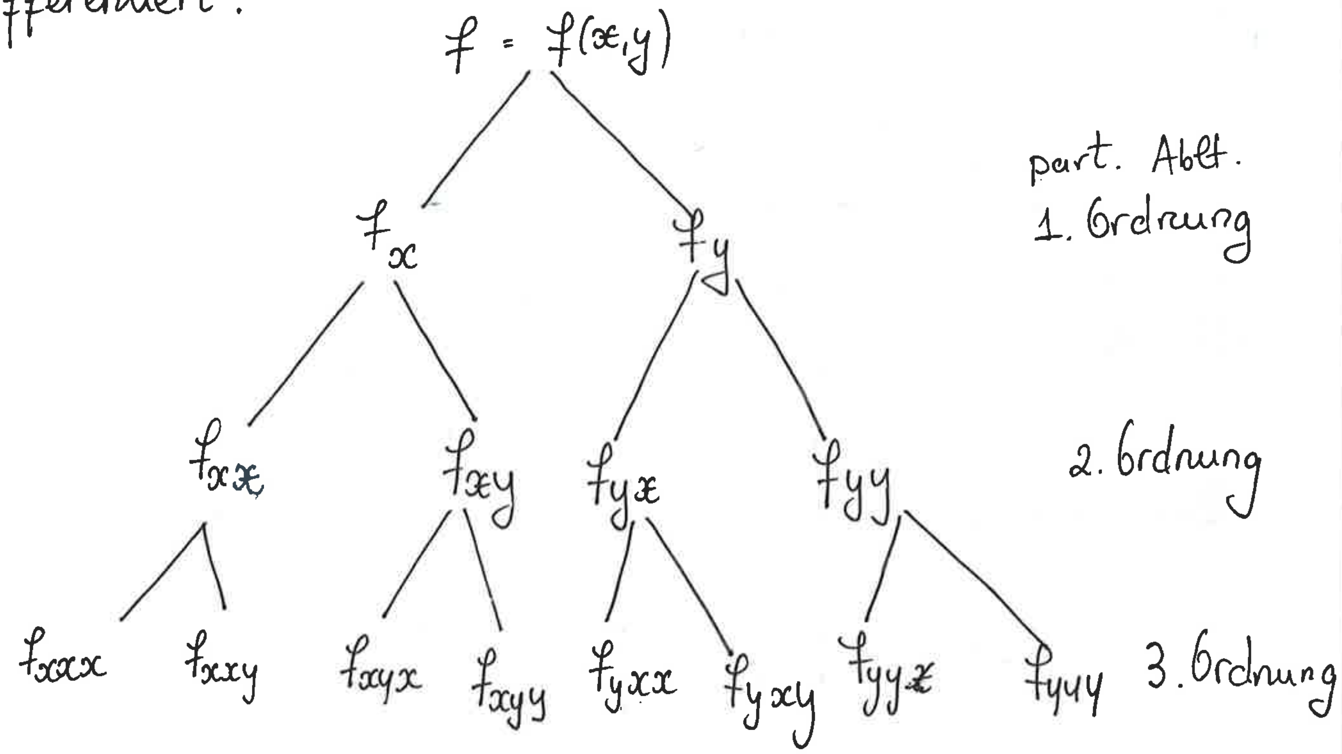
Bsp **Kugelkoordinaten im Raum**

$f(x,y,z)$ wird durch
$$x = r\cos\varphi\sin\theta \qquad r \geq 0$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$
$$z = r\cos\theta \qquad \theta \in [0,\pi]$$

in $F(r,\varphi,\theta) = f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$ übergeführt.

G6. HÖHERE PARTIELLE ABLEITUNGEN

- **Partielle Ableitungen höherer Ordnung**: eine Fkt von mehrere Variablen wird mehrmals nacheinander partiell differentiert.



- Die einzelnen Differentiationschritte sind grundsätzlich in der Reihefolge, in der die als Indizes im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen. (von links nach rechts gelesen)

$\rightarrow$ f_{xx}, f_{xxx}, ... : $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$; $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

Reine partielle Ableitungen

$$\boxed{f_{\underbrace{xx\ldots x}_{n\text{-mal}}} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}}$$

- f_{xy}, f_{xyx} $\rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$

- $f_{xyz} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$

f_{xy}, f_{xyx} : gemischten partiellen Ableitungen

[Reihefolge kann, unter Vorraussetzungen, vertauscht werden]

★ Ordnung einer part. Ableitung = Anzahl der Indizes.

Bsp 1: $\boxed{f(x,y) = \ln(x^2+y)}$

$f_x = \dfrac{2x}{x^2+y}$; $f_{xy} = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$; $f_{xx} = \dfrac{2(x^2+y) - 4x^2}{(x^2+y)^2}$

$f_y = \dfrac{1}{x^2+y}$; $f_{yx} = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$; $f_{yy} = \dfrac{-1}{(x^2+y)^2}$

$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$

Bsp 2 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Berechnen Sie $f_{xy}(0,0)$ und $f_{yx}(0,0) = ?$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y-0}{y} = 1 \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

Wenn $(x,y) \neq (0,0)$: $f_{xy} = f_{yx}$

Warum? Weil part. Ableit. 2. Ordnung nicht stetig sind.

Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit gemischter part. Ableitungen)

Für jede Fkt $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit stetigen part. Ableitungen 1. und 2. Ordnung, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \qquad (1 \leq i,j \leq n)$$

D.h.: f 2-mal stetig diff'bar

Wenn f k-mal stetig diff'bar ist (part. Ableitungen 1, 2, ... k-ter Ordnung sind stetig), dann bei einer gemischten part. Ableitung. k-ter Ordnung darf die Reihefolge der Indizes vertauscht werden.

G7. TAYLORFORMEL 2. ORDNUNG

Erinnerung (Taylorformel)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff'bar, $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a,b]$

dann $\exists\, \delta \in (0,1)$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{f'(x_0)}{1!} + h^2\frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + h^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} +$$

$$+ \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)}_{\text{Restglied}}$$

Def [Hesse-Matrix von $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$]

Wenn f 2-mal stetig diff-bar ist, dann ist die Hesse-Matrix H_f definiert durch

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

H_f = Matrix der part. Ableitungen 2. Ordnung

Satz [Taylorformel 2. Ordnung]

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, $\vec{x}$ ein innerer Punkt von D und $U_r(\vec{x}) \subseteq D$. Dann ist für $\|\vec{h}\| < r$

$$(*) \quad f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{h}, H_f(\vec{x}) \vec{h} \rangle + \underbrace{\varepsilon_2(\vec{h})}_{\text{Restglied}}$$

wobei $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\varepsilon_2(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0$

$(*)$ = Approx. 2. Grades an f in der Umgebung von $\vec{x}$.

Bsp: Sei $f(x,y) = \sin(x+y^2)$

Taylorentwicklung von f um $(0,0) = ?$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y^2) \\ 2y\cos(x+y^2) \end{pmatrix}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y \sin(x+y^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ da part. Ablt. 1. und 2. Ordnung stetig sind (Satz von Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x+y^2) + 2y\left(-\sin(x+y^2)\right) \cdot 2y = 2\cos(x+y^2) - 4y^2 \sin(x+y^2)$$

$$\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y^2) & -2y\sin(x+y^2) \\ -2y\sin(x+y^2) & 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2) \end{pmatrix}}$$

Taylor formel

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \nabla f(0,0) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \varepsilon(\|(x,y)\|^2)$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H_f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} \right\rangle + \varepsilon(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = x + \frac{1}{2} 2y^2 + \varepsilon(\|(x,y)\|^2)}$$

(*) Für Entwicklung um $(0,0)$

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + \langle \vec{x}, \nabla f(\vec{0}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}, H_f(\vec{0}) \cdot \vec{x} \rangle + \varepsilon(\|\vec{x}\|^2)}$$

G.8 EXTREMWERTE : MAXIMA UND MINIMA

Def: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat im D ein absolutes Max im Punkt $\vec{x}_0$ falls $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}),\ \forall\ \vec{x} \in D$ und ein abs. Min falls $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})\ \forall\ \vec{x} \in D$.

Def: f hat im $\vec{x}_0$ ein relatives Maximum, wenn es eine Umgebung $U_r(\vec{x}_0)$ gibt wo

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \quad ,\forall\ \vec{x} \in U_r(\vec{x}_0) \quad \text{und.}$$

rel Minimum : falls $f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}),\ \forall\ \vec{x} \in U_r(\vec{x}_0)$.

(lokales Minimum & lokales Maximum

Def: $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kompakt, wenn D abgeschlossen und beschränkt

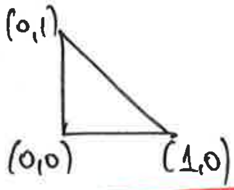
z.B → abgeschlossene Kugeln

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$$

→ Parallelipipede

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

→ Dreieck :



$$D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\ \vec{a}, \vec{b} \in D$ sodaß

$$f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \quad \text{und} \quad f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

- Max und min (absolute) wird im D angenomen.

- Was machen wenn D nicht Kompakt ist? aber $f: D \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar? Gibt es Min und Max?

Satz: Ist $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Inneren von D partiell diff.'bar und $\vec{a}$ ein innerer Punkt von D, wo f ein Extremum hat, dann
$$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$$
Notwendiges Kriterium

Nicht hinreichend

- Umgekehrt gilt nicht, d.h wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{a}$ muss nicht unbedingt Max oder Min sein.

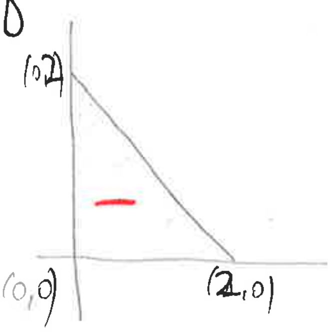
Def: $\vec{a}$ heißt Stationär, wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

- Extremwerte von $f(x,y)$ können nur in Punkten auftreten in denen
  - $\boxed{A}$ die part. Ableitungen verschinden $\nabla f = \vec{0}$ — stationäre Punkte
  - $\boxed{B}$ die part. Ableitungen nicht existieren. Hierzu gehören die Randpunkte

Bsp: $f(x,y) = xy^2(x+y-2)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$

$D \to$ Kompakt $\Rightarrow$ max & min in D



Am Rand: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 2 \end{array}\right]$: $f(x,y) = 0$

und im Inneren $f < 0$

$\Rightarrow$ Max am Rand.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x+y-2)y^2 \\ f_y = xy(2x+3y-4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \end{array} \Rightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4}$ und $(\frac{1}{2}, 1)$ = absolutes Minimum.

Max am Rand : für alle Randpunkte.

(A.) STATIONÄRE PUNKTE

Erinnerung : $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und f zweimal diff-bar

x_0 stationär : $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0$ (f Konkav) $\Rightarrow$ x_0 Maximum

$f''(x_0) > 0$ (f Konvex) $\Rightarrow$ x_0 Minimum

Was ist $f''(x_0)$ in mehrere Dimensionen?

Hesse - Matrix : gibt die Krümmung in $\mathbb{R}^n$.

Def: Eine symmetrische $(n \times n)$ - Matrix A heißt

1) positiv definit : $\langle \vec{h}, A\vec{h} \rangle > 0$, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq \vec{0}$
2) negativ definit : $\langle \vec{h}, A\vec{h} \rangle < 0$, —— ‖
3) indefinit: $\exists \vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$: $\langle \vec{h}, A\vec{h} \rangle < 0$
   $\langle \vec{k}, A\vec{k} \rangle > 0$

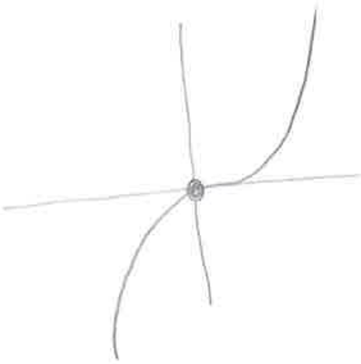
! $\exists$ Matrizen die keine dieser 3 Eigenschaften haben.

Satz: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, im Inneren von D zweimal stetig diff'bar und $\vec{a} \in D$ ein stationärer Punkt von D $(\nabla f(\vec{a}) = \vec{0})$

Dann gilt:

1) Ist $H_f(\vec{a})$ positiv definit ($f'' > 0$, konvex) $\Rightarrow \vec{a}$ = rel Min
2) Ist $H_f(\vec{a})$ negativ def ($f'' < 0$, konkav) $\Rightarrow \vec{a}$ = rel. Maximum.
3) $H_f(\vec{a})$ indefinit $\Rightarrow \vec{a}$ - Sattelpunkt (Kein Extremum)

Sattelpunkt



→ die Kurve erreicht einen Punkt wo die Steigung $= 0$.

- Falls $H_f(\vec{a})$ keiner dieser 3 Eigenschaften hat, kann man den Satz nicht anwenden.

! Wie überprüft man ob eine Matrix A, positiv oder negativ definit ist?

$\boxed{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

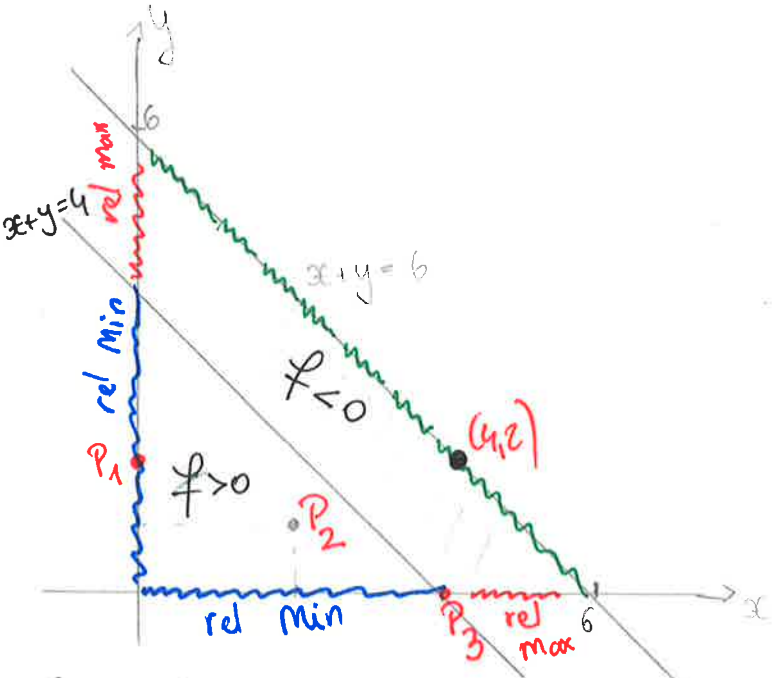
- $\det A > 0$ und $a_{11} > 0 \Rightarrow$ A positiv def.
- $\det A > 0$ und $a_{11} < 0 \Rightarrow$ A negativ. def.
- $\det A < 0 \Rightarrow$ indefinit.

$\boxed{n=3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A_1 = (a_{11})$; $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

- $\det A_1 > 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A > 0 \Rightarrow$ A positiv def.
- $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A < 0 \Rightarrow$ A negativ def
- $\det A \neq 0$ und keine von der beiden ersten Bed. gilt $\Rightarrow$ A indefinit

Bsp: Bestimmen Sie die Extrema (rel und Absolute) für $f(x,y)$ gegeben durch: $f(x,y) = yx^2(4-x-y)$

im Dreieck, begrenzt durch die Geraden. $x=0$, $y=0$, $x+y=6$



Praktisches Vorgehen

A Stationäre Punkte

$\nabla f(x,y) = 0$

$f(x,y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$

$f_x(x,y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2$

$f_y(x,y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \Rightarrow (4-2y)\,y\,(8-3(4-2y)-2y)=0 \; (*) \\ x^2(4-x-2y)=0 \Rightarrow x^2=0 \text{ oder } 4-x-2y=0 \end{cases}$$

$x=0 \to$ Nur Randpunkte

$4-x-2y=0 \Rightarrow x = 4-2y$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 4-2y=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 8-12+6y-2y=0 \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow \boxed{y=1} \to \boxed{x=2} \\ y=0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Punkte**:

$(0,2) = P_1$ ✓ rel Min.

$(2,1) = P_2$ ✓ rel Max

$(4,0) = P_3$ ✓ Kein Extrema

$(0,y) \to P_4$ ✓ rel Max oder Min.

- Nur $P_2 \to$ innerer Punkt von Δ
- die anderer Punkte müssen anders untersucht werden.

$\underline{P2}$: Hesse Matrix im $(2,1)$

$f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2$

$f_{yy} = -2x^2$

$f_{yx} = 8x - 3x^2 - 4xy = f_{xy}$ da f 2-mal stetig diff-bar

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(2,1) & f_{xy}(2,1) \\ f_{yx}(2,1) & f_{yy}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-12-2 & 2\cdot 8 - 12 - 8 \\ -4 & -2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det H_f(2,1) = 6\cdot 8 - 16 = 32 > 0 \\ f_{xx}(2,1) = -6 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_f \to \text{neg. def und.}$$

$\boxed{(2,1) \text{ rel. Maximum}}$

$\boxed{B}$ Randpunkte von f

$(4,0)$ → Zeichnen die Höhenlinien

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$\underline{x=0}$: $f(0,y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (0,y) \text{ rel. min } \quad 0 \le y < 4 \\ (0,y) \text{ rel Max } \quad 4 < y \le 6. \end{array}\right.$

P1 und P4

$y=4$: $(0,4)$ kein Extremwert, wei jede Umgebung von $(0,4)$: $f < 0$ und $f > 0$

$\boxed{y=0}$: $f(x,0) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x,0) \text{ rel Min für } 0 \le x < 4 \\ (x,0) \text{ rel Max für } 4 < x \le 6 \end{array}\right.$

$(4,0)$ → Kein Extrema.

Was ist am Rand $\boxed{x + y = 6}$ $\quad$ ~~x = 6-y~~ $y = 6 - x$

$f(x,y) = -2x^2(6-x) = -12x^2 + 2x^3$

$f'(x) = 6x^2 - 24x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ $\Rightarrow (0,6)$

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (4,2)$

$(0,6) \to$ rel Max

Was ist $(4,2) = ?$

$$f(4,2) = -64$$

Alle anderen rel Min. ist $f = 0 \Rightarrow (4,2)$ ist absolutes Min

Rel max: $f(2,1) = 4$

$f(0,y) = 0 \quad 4 < y \leq 6$

$f(x,0) = 0 \quad 4 < x \leq 6$

$\Rightarrow (2,1)$ Absolutes Max

Zusammenfassung:

rel Max: $(0,y) \quad 4 < y \leq 6 \quad ; f(0,y) = 0$

$(x,0) \quad 4 < x \leq 6 \quad f(x,0) = 0$

abs Max: $(2,1) \quad f(2,1) = 4$

rel Min: $(0,y) : 0 \leq y < 4 \; ; f(0,y) = 0$

$(x,0) : 0 \leq x < 4 \quad f(x,0) = 0$

abs Min: $(4,2) \quad f(4,2) = -64.$

Wie untersucht man die Randpunkte?

- Zeichnung der Höhenlinien $f(x,y) = f(x_0, y_0)$
- Anwendung Satz von Weierstraß (Kompakte Menge)
- Direkte Berechnung von $f(x,y) - f(x_0, y_0)$
- Schnitt mit bestimmten Flächen.

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2.$$

Lösung: Zunächst werden die stationären Punkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y - y^2 \\ x^2 - x - 2xy + 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Also muß gelten:

$$\begin{aligned} 2xy - y - y^2 &= 0, && (1) \\ x^2 - x - 2xy + 2y &= 0. && (2) \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, so wird (1) zu "$0 = 0$" und Gleichung (2) zu

$$x^2 - x = 0, \quad \text{d.h. } x(x-1) = 0, \quad \text{d.h. } x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Also sind $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,0)$ stationär!

Nun betrachten wir den Fall $y \neq 0$ und kürzen in Gleichung (1) durch y und erhalten:

$$2x - 1 - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2x - 1.$$

Dies setzen wir in Gleichung (2) ein:

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 2x \cdot (2x-1) + 2 \cdot (2x-1) = 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 - x - 4x^2 + 2x + 4x - 2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & -3x^2 + 5x - 2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-5-1}{-6} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Also sind auch die Punkte

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad P_4 = (1,1)$$

stationär!

Zur Bestimmung der Typen der stationären Punkte berechnen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1-2y \\ 2x-1-2y & -2x+2 \end{pmatrix}.$$

Typbestimmung der stationären Punkte:

1. $P_1 = (0,0)$: Es ist
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(0,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Somit ist P_1 ein **Sattelpunkt**.

2. $P_2 = (1,0)$: Es ist
$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,0)$ indefinit, und somit ist P_2 ein **Sattelpunkt**.

3. $P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$: Es ist
$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
Da
$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0 \quad \text{und} \quad \det H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0,$$
ist $H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ positiv definit. Somit ist P_3 ein **Minimum**.

4. $P_4 = (1,1)$: Es ist
$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,1) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,1)$ indefinit, und somit ist P_4 ein **Sattelpunkt**.

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten im Mehrdimensionalen:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + y.$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy + 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

D.h.

$$\begin{aligned} 2xy - y^2 &= 0, \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, muss gelten: $x^2 + 1 = 0$, ein Widerspruch, d.h. wir können $y \neq 0$ annehmen! Das obige Gleichungssystem wird also durch Kürzen von y zu

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$y = 2x \quad \text{und} \quad 0 = x^2 - 2x \cdot \underbrace{2x}_{=y} + 1 = x^2 - 4x^2 + 1 = -3x^2 + 1.$$

Also:

$$3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Die stationären Punkte (=Extrempunkte) sind also:

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right), P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Zur Bestimmung der Typen der stationören Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

- **Typ von P_1:**

$$H_f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_1 indefinit, d.h. P_1 ist ein **Sattelpunkt**.

- **Typ von P_2:**

$$H_f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_2 indefinit, d.h. P_2 ist ein **Sattelpunkt**.

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y,z) = -\ln(x^2+y^2+z^2+1).$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Es muss also gelten:

$$x = y = z = 0,$$

d.h. der einzige stationäre Punkt ist $P = (0,0,0)$.

Wir bestimmen nun den Typ von P:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-2(-x^2+y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2-y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2+y^2-z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

Wir werten nun die Hesse-Matrix im Punkt P aus:

$H_f^{(1)}$

$H_f^{(2)}$

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D.h. $\det H_f(0,0,0) = -8 < 0$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \det H_f^{(1)}(0,0,0) &= -2 < 0 \quad \text{und} \\ \det H_f^{(2)}(0,0,0) &= 4 > 0. \end{aligned}$$

Also ist $H_f(0,0,0)$ negativ definit. Somit liegt bei P ein **relatives Maximum** vor.

B. EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

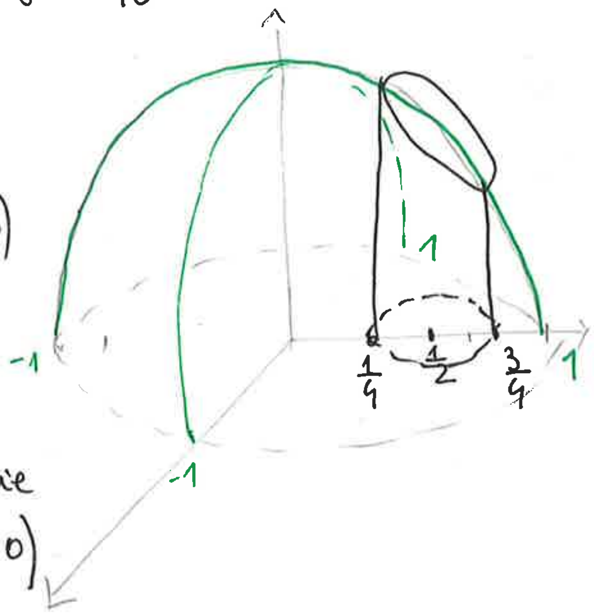
Gesucht: Extrema (Max oder Min) von f auf der Menge
$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{g_1(\vec{x}) = 0, \ldots g_m(\vec{x}) = 0}_{\text{Nebenbedingungen}}\}$$

Wir behandeln den Fall $\boxed{m=1}$ (nur eine Nebenbedingung)

> Gesucht die Punkte auf der Kurve $g(\vec{x}) = 0$ in denen f ein Extremwert hat.

Bsp: Sei $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Extrema von f unter die Bedingung $g(x,y) = (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0$

$f(x,y) \to$ Kugelscholl über x,y-Ebene mit Radius 1



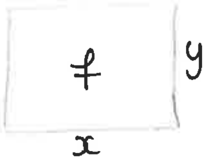
$g(x,y) = 0$: Kreis Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{1}{4}$

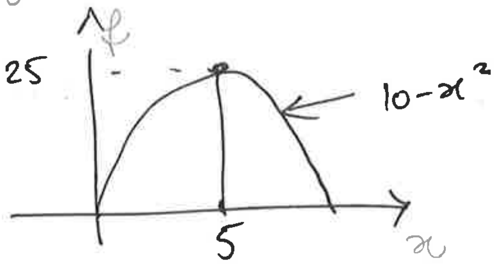
- Anschaulich: Max von f auf der Kugelfläche über der Kreislinie liegt: $(\frac{1}{4}, 0)$; Min bei $(\frac{3}{4}, 0)$

> Bestimmung von Extrema

(1) Einsetzen: löst man $g(\vec{x}) = 0$ nach eine Variable aus, und setzt die Variable in $f(\vec{x})$

Bsp: Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang $U = 20$ cm die grösste Fläche?





$f(x,y) = x \cdot y$

NB: $2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$

$0 \leq x \leq 10$

$f(x,y) = x(10-x)$; $\max\limits_{0 \leq x \leq 10} f(x,y) = ?$

$f'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

Rand kann nicht max sein $(y = 0) \Rightarrow x = y = 5 \Rightarrow$ max. Fläche

LAGRANGE MULTIPLIKATOREN

Satz: Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D - offen) stetig diff-bar.
Ist $\vec{a} \in D$ Lösung des Problem

$$\begin{cases} \max \text{ (oder min) } f(\vec{x}) \\ \text{NB}: \ g(\vec{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \nabla g(\vec{a}) = \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla g(\vec{a}) = 0} \quad (*)$$

λ = Lagrange Multiplikator.

$(*) \Leftrightarrow \nabla f(\vec{a}) = -\lambda \nabla g(\vec{a}) \Rightarrow$ die 2 Vektoren $\nabla f(\vec{a})$ und $\nabla g(\vec{a})$ sind parallel.

Vorgangsweise: Man sucht die stationären Punkte der Lagrange-Fkt:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\, g(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

• D.h.

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = g(x,y) \end{cases}$$

→ aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Stat. Punkte bestimmen.

<u>Bemerkungen</u>:

- λ ist eine Hilfsvariable, ohne Bedeutung.
  → schnell los werden
- Die Bedingungen (*) notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Extremwertes under der NB $g(x,y)=0$
  Es muss daher von Fall zu Fall geprüft werden ob auch tatsächlich ein Extremwert vorliegt.

Allgemeiner Fall (mehrere NB)

<u>Satz</u>: Seien $f, g_1, \dots, g_m : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (D offen, $m<n$) stetig diff'bar. Ist $\vec{a}$ Lösung des Problems

$$\begin{cases} \max f(\vec{x}) \\ NB : g_1(\vec{x})=0, \dots, g_m(\vec{x})=0 \end{cases}$$

mit linear unabhängigen Gradienten $\nabla g_1(\vec{a}), \nabla g_2(\vec{a}), \nabla g_m(\vec{a})$ so gibt es $\lambda_1 \dots, \lambda_m$:

$$\boxed{\nabla f(\vec{a}) + \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{a}) = 0}$$

<u>Konkret</u>: Man sucht die Stat. Pkt. der Lagrange-Fkt.

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_1(x_1, \dots x_n)$$

in den $n+m$ Variablen $x_1 \dots, x_n, \lambda_1 \dots, \lambda_m$.

Bsp: Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x - y + 2z$.
Gesucht Extrema von f auf dem Ellipsoid:
$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$

$$\begin{cases} \max\ (\min)\ f(x,y,z) \\ NB: \ g(x) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 \end{cases}$$

$$L(x,y,z,\lambda) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2)$$

$$\nabla L = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(x_1, y_1, z_1) = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(x_2, y_2, z_2) = -2\sqrt{2}$

Da $\left.\begin{array}{l}\text{Ellipsoid kompakt} \\ f \text{ stetig diff'bar}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ nimmt max und min an
$\Rightarrow$

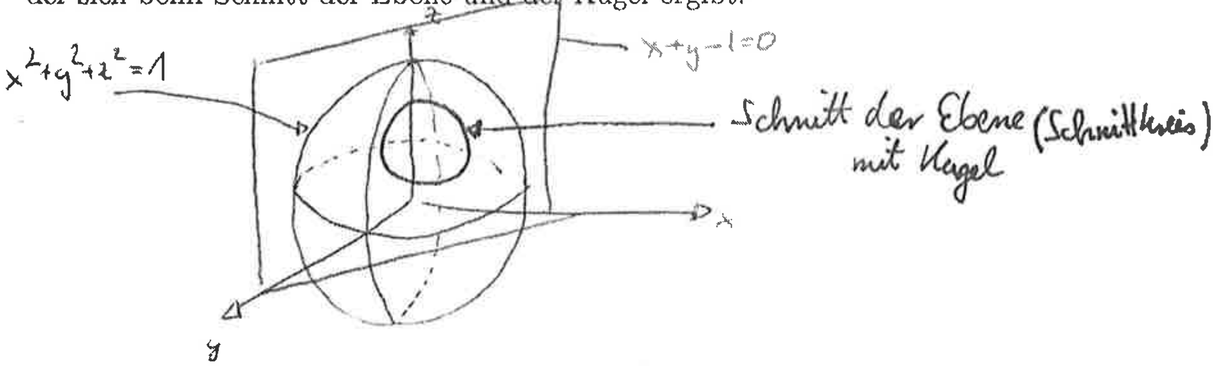
Max : (x_1, y_1, y_1)

Min (x_2, y_2, y_2)

Lagrange-Methode mit mehreren Nebenbedingungen:

Aufgabe: Maximiere/minimiere $f(x,y,z) = xyz$ unter den beiden Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = x+y-1 = 0$ (Ebene im $\mathbb{R}^3$) und $g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ (Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1 um $\vec{0}$).

Skizze: Es sind die Extrema von $f(x,y,z)$ zu finden auf dem Schnittkreis, der sich beim Schnitt der Ebene und der Kugel ergibt:



Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= xyz + \lambda_1(x+y-1) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1). \end{aligned}$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} yz + \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ xz + \lambda_1 + 2y\lambda_2 \\ xy + 2z\lambda_2 \\ x+y-1 \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Subtraktion der zweiten Koordinate von der ersten Koordinate des Gradienten ergibt:

$$-z(x-y) + 2\lambda_2(x-y) = 0 \implies \lambda_2 = \frac{z(x-y)}{2(x-y)} = \frac{z}{2} \quad \text{falls } x \neq y.$$

Aus der letzten Zeile der Gradientengleichung folgt: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Aus der vierten Gleichung folgt $y = 1-x$. Einsetzen in die dritte Koordinatengleichung des Gradienten ergibt:

$$0 = xy + 2z\frac{z}{2} = xy + 1 - x^2 - y^2 = x(1-x) + 1 - x^2 - (1-x)^2 = 3x(1-x).$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = 1$. Falls $x = 0$, so gilt $y = 1 - x = 1$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$; falls $x = 1$, so gilt $y = 1 - x = 0$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$. D.h. (1,0,0) und (0,1,0) sind stationäre Punkte!

Wir betrachten nun den Fall $x = y$: Aus der vierten Gradientengleichung folgt:

$$0 = x + y - 1 = x + x - 1 \Longrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - 2x^2 = \frac{1}{2}$, d.h. $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also sind auch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ stationäre Punkte! Welche Typen von stationären Punkten liegen vo

Es gilt $f(1,0,0) = f(0,1,0) = 0$ und $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ sowie $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$. Also muß bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Maximum vorliegen und bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Minimum vorliegen. An den Punkten (1,0,0) und (0,1,0) können nur Sattelpunkte vorliegen, da ansonsten auf dem Schnittkreis "dazwischen" noch weitere Maxima oder Minima existieren müssten (es gibt aber keine weiteren stationären Punkte, also keine weiteren Maxima/Minima).

Skizze des Schnittkreises: