Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten unter Nebenbedingung mit Hilfe von Parametrisierung:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y) = x^2 y$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Lösung: Wir parametrisieren mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Einsetzen dieser Parametrisierung in die Nebenbedingung ergibt:

$$g(x,y) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 1 = r^2 - 1 = 0,$$

d.h. die Nebenbedingung wird zu $r = 1$. Einsetzen der Parametrisierung in $f(x,y)$ unter Berücksichtigung von $r = 1$ ergibt:

$$h(\varphi) := f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Es sind nun die Extrempunkte von $h(\varphi)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= 2\cos\varphi(-\sin\varphi)\sin\varphi + \cos^2\varphi\cos\varphi \\ &= \cos\varphi(-2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \cos\varphi \cdot (1 - 3\sin^2\varphi) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{\cos\varphi = 0}_{\Longrightarrow \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}} \quad \text{oder} \quad 1 - 3\sin^2\varphi = 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 - 3\sin^2\varphi = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{3} \Longrightarrow |\sin\varphi| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow \quad \varphi \in \left\{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \arcsin -\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}. \end{aligned}$$

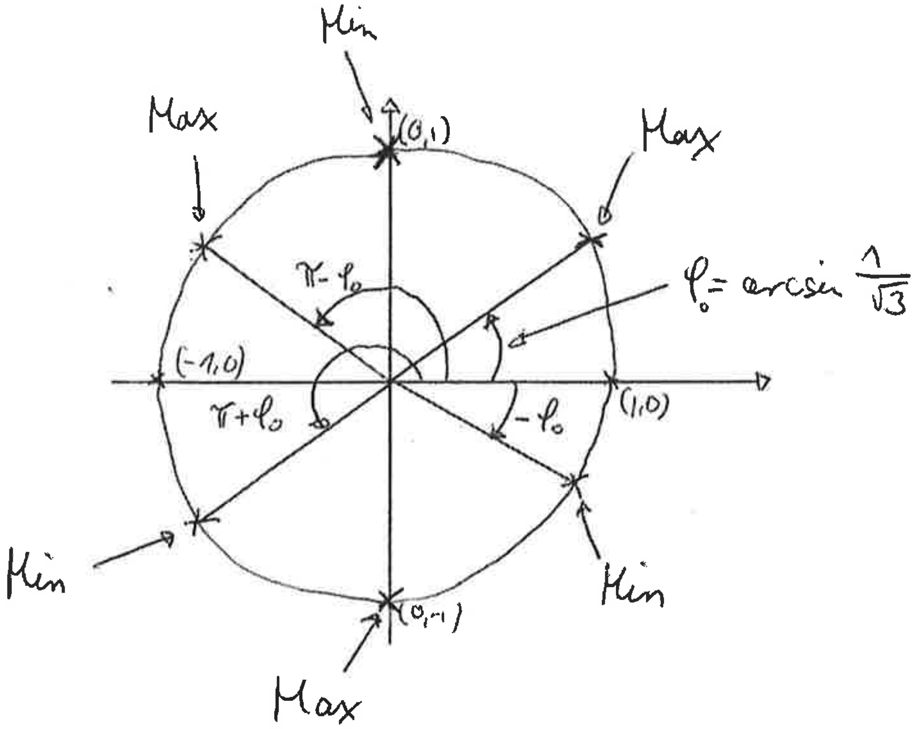
Zur Bestimmung der Typen dieser Extrempunkte berechnen wir $h''(\varphi)$:

$$\begin{aligned} h''(\varphi) &= -\sin\varphi \cdot (1 - 3\sin^2\varphi) + \cos\varphi \cdot (-6)\sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ &= -\sin\varphi \cdot (1 - 3\sin^2\varphi) - 6\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h''\Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx -2.31 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) &= 2 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ h''\Big(\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx -2.31 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx 2.31 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) &= -2 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi = \frac{3\pi}{2}, \\ h''\Big(\arcsin -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx 2.31 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Skizze:

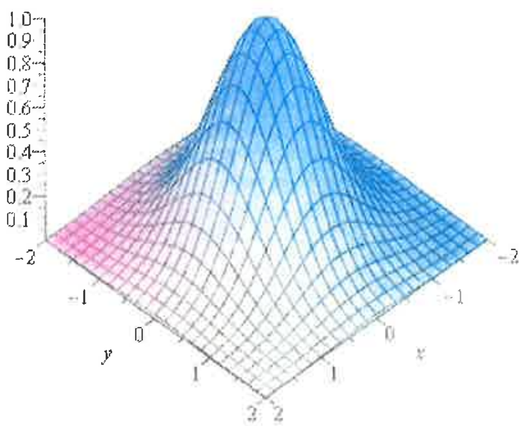


Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Zur Illustration von Extremwerten im Mehrdimensionalen:

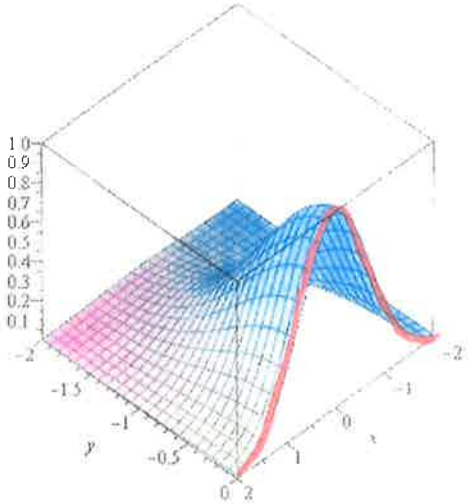
Man betrachte folgende Funktion

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$



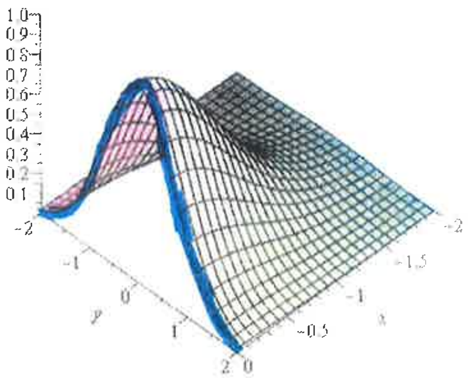
Diese Funktion besitzt bei $(x_0, y_0) = (0,0)$ ein Maximum, da stets $-x^2 - y^2 \leq 0$ ist.

Wenn man die Graphenfläche **entlang der x-Achse schneidet**, ergibt sich folgendes Bild:



D.h. die Funktion $g: x \mapsto f(x,0)$ (Graph ist die rote Linie) besitzt ebenfalls bei $x = 0$ ein Maximum. D.h. die erste Ableitung von g ist dort 0, d.h. $0 = g'(0) = f_x(0,0)$.

Umgekehrt: **schneidet** man die Graphenfläche **entlang der y-Achse**, ergibt sich folgendes Bild:

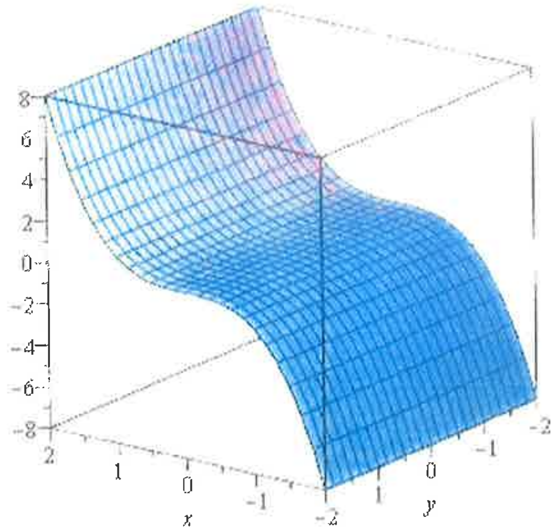


D.h. die Funktion $h: y \mapsto f(0,y)$ (Graph ist die blaue Linie) besitzt ebenfalls bei $y = 0$ ein Maximum. D.h. die erste Ableitung von h ist dort 0, d.h. $0 = h'(0) = f_y(0,0)$. Somit muß für die Extremstelle (x_0, y_0) gelten:

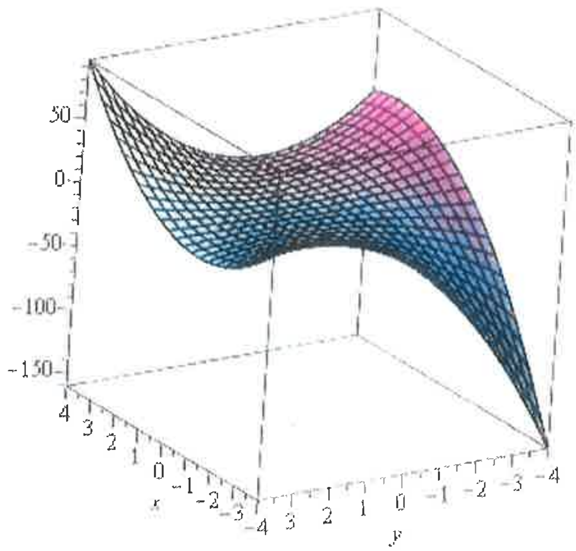
$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}.$$

Weitere Beispiele:

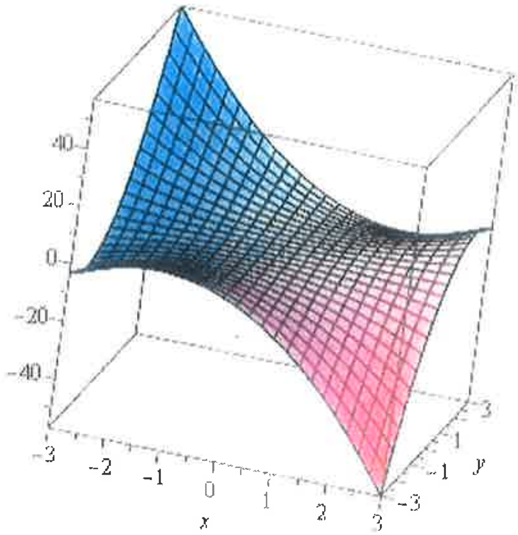
1. $f(x, y) = x^3$ besitzt Sattelpunkte an allen Stellen $(0, y), y \in \mathbb{R}$:



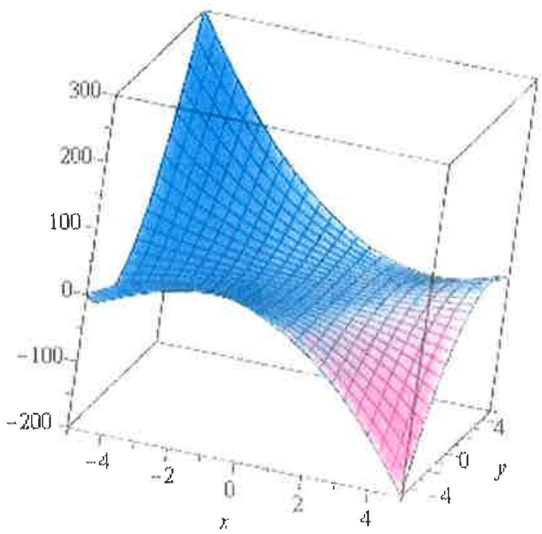
2. $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$:



3. $f(x, y) = x^2y - xy^2 + y$:



4. $f(x, y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2$:



$\boxed{G9}$ VEKTORFELDER

Def. Vektorfeld: $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

★ $\vec{f}$ heißt partiell diff'bar : wenn f_i partiell diff'bar
stetig diff'bar : $\forall f_i$ stetig diff'bar ($\Leftrightarrow$ f_i part. Ableitungen existieren und stetig)

Jacobimatrix oder Funktionalmatrix

$J_{\vec{f}}(\vec{x})$: $(m \times n)$ - Matrix

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x})^t \\ \nabla f_2(\vec{x})^t \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Def. $\vec{f}$ heißt total differentierbar in $\vec{x}_0$ ($\vec{x}_0$ innerer Punkt von D) wenn es im $\vec{x}_0$ partiell diff'bar ist und

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - J \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = \vec{0}$$

- $J \to (m \times n)$ - Jacobi Matrix

KETTENREGEL

Satz: Ist $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to E \subseteq \mathbb{R}^m$ total differentierbar im inneren Punkt $\vec{a} \in D$ und $\vec{g}: E \to \mathbb{R}^k$ total diff'bar im inneren Punkt $\vec{f}(\vec{a}) \in E$, dann ist

$$\vec{g} \circ \vec{f}: D \to \mathbb{R}^k, \quad \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$$

total diff in $\vec{a}$, und es gilt

$$\boxed{J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{a}) = J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{a})) \cdot J_{\vec{f}}(\vec{a})}$$

Bsp: Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ x-y \end{pmatrix}$; $g(x,y) = xy$ und $\boxed{h = g \circ f}$

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) Jacobi-Matrizen von f und g

b) Jacobi-Matrix von h auf 2 Arten: direkt und mit der Kettenregel.

a) $J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $J_g = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$

$J_g(x,y)$

b) $h = g \circ f = g(f(x,y)) = g(e^{xy}, x-y) = (x-y)e^{xy}$

Direkt: $J_h = \begin{pmatrix} ye^{xy}(x-y) + e^{xy} & xe^{xy}(x-y) - e^{xy} \end{pmatrix}$

Kettenregel: $J_h = J_g(\vec{f}(x,y)) \cdot J_{\vec{f}}(x,y) =$

$= J_g\left((e^{xy}, x-y)\right) \cdot J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y, & e^{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \left[(x-y)ye^{xy} + e^{xy} \qquad (x-y)xe^{xy} - e^{xy} \right]$$

GRADIENT, DIVERGENZ, ROTATION LAPLACEOPERATOR

Nabla Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ → Differential operator

Operator: Abbildung die eine Fkt in eine neue Fkt überführt.

- Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reelwertige Fkt:

$$\operatorname{grad} f := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f$$

$$\boxed{\underset{\nabla}{\operatorname{grad}} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)}$$

- Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld $\quad \vec{f}(x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ f_2(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix}$

Divergenz von $\vec{f}$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{f} := \nabla \vec{f} = \langle \nabla, \vec{f} \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})}$$

Div von Vektorfeld ist ein Skalarfeld (reelwertige Fkt)

Divergenz eines Vektorfeldes: beschreibt die Änderung des Massenflusses im Punkt $\vec{x}$.

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) > 0$: $\vec{x}$: Quelle

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) < 0$: $\vec{x}$: Senke

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = 0$ "Feld ist Quellenfrei"

LAPLACE OPERATOR

$$\Delta : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\star \quad \boxed{\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}}$$

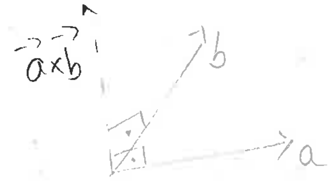
Für Vektorfelder $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Δ wird Komponentenweise definiert.

$$\Delta \vec{f} = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{pmatrix}$$

$\star$ Laplace Operator → wichtig in vielen physikalischen Gleichungen (Wellengleichung → Kapitel 7)

ROTATION IN 3-DIM. RAUM.

Def: In $\mathbb{R}^3$ gibt es noch ein Vektorprodukt $\times$ äußere Produkt oder Kreuzprodukt von



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ = Gemeinsamer Normalvektor auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Def: Sei $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist die Rotation von $\vec{f}$, ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot}\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch: $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}\vec{f}(x,y,z) = \nabla \times \vec{f}(x,y,z) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

! Beschreibt $\vec{f}$ die Geschwindigkeit einer Strömung, dann gibt rot $\vec{f}$ die Wirbel dieser Strömung an.

- rot $\vec{f} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Strömung ist wirbelfrei
- rot $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$: $\vec{a}$: Zentrum des Wirbels, die Flüssigkeit rotiert um die durch rot $\vec{f}(\vec{a})$ gegebene Achse um den Punkt $\vec{a}$ (turbulente Strömung)

__Bsp__: $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$; rot $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- in jedem Punkt $\rightarrow$ Wirbel in Richtung z – Achse

__Bsp__: Potentialfelder sind wirbelfrei

Potential $\quad U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ reelwertige Fkt

__z.B__ Potential des Gravitationsfeldes

$$U(\vec{x}) = \frac{-c}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{x}$$

__Potentialfeld__: $\vec{f}(\vec{x}) = \text{grad } U(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$

$$\text{rot } \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} U_{zy} - U_{yz} \\ U_{xz} - U_{zx} \\ U_{yx} - U_{xy} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

wegen Vertauschbarkeit der part. Ableitungen

Rechenregeln im $\mathbb{R}^3$:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Dann:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) \equiv 0$ Rotationsfeld ist Quellenfrei

2) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \equiv \Delta f$ Def des Laplaceoperator.

3) $\operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{v} \rangle + f \cdot \operatorname{div} \vec{v}$

4) $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) = \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \cdot \vec{v}$

Beweis: 1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) \equiv \underline{\underline{0}}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y}}$$

$= 0$

F INTEGRATION – TEIL 2

INTEGRATION VON FUNKTIONEN IN MEHRERE VARIABLEN

- Integration Fkt in einer Variable - gewöhnliche (simple) Integrale
- Mehrfach Integrale → mehrere nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrale zurückzuführen

Def: n-dimensionales Parallelipiped ist eine Menge

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n] =$$
$$= \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n \}$$

$$\begin{cases} n=1 & : \text{Interval} \\ n=2 & : \text{Rechteck} \\ n=3 & : \text{Quader} \end{cases}$$

Def: Sei Q - Parallelipiped. Ihr Inhalt $\text{Inh}(Q)$ ist

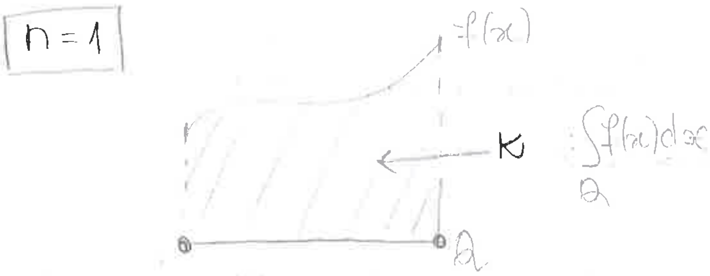
$$\boxed{\text{Inh}(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots (b_n - a_n)}$$

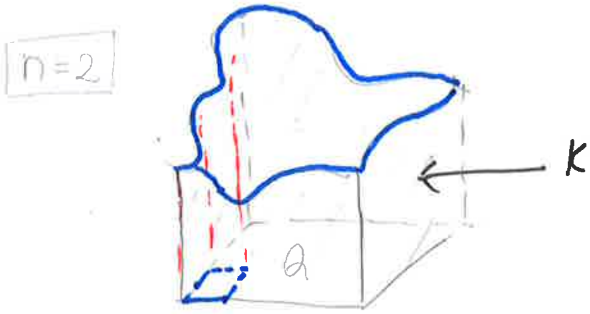
$$\begin{cases} n=1 & : \text{Länge} \\ n=2 & \text{Flächeninhalt} \\ n=3 & \text{Volumen} \end{cases}$$

Def: Sei Q - parallelipiped in $\mathbb{R}^n$ und $f: Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0, \forall x \in Q$. Dann beschreibt die Menge

$$\boxed{K = \left\{ (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n) \in Q \\ 0 \leq y \leq f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\}}$$

einen Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$.





Frage: Wie berechnet man den Inhalt der Körper K?
Analog zur Integration in einer Variable betrachten wir Zerlegungen Z von Q:

$$\boxed{Q = \bigcup_{k=1}^{\ell} Q_k}$$

in Parallelipipede Q_k die nur Seitenflächen Gemeinsam haben.

n = 2

→ Zerlegung von Q

Wir definieren
$$\begin{cases} m_k = \min \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k \} \\ M_k = \max \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k \} \end{cases}$$

und die Unter- und Obersummen

$$U(Z,f) = \sum_{k=1}^{\ell} m_k \operatorname{Inh}(Q_k) \quad : \text{Untersumme von } f$$

$$O(Z,f) = \sum_{k=1}^{\ell} M_k \operatorname{Inh}(Q_k) \quad \text{Obersumme von } f$$

Def: Eine beschränkte Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$ heißt <u>integrierbar</u> auf Q, wenn

$$\boxed{\sup_Z U(Z,f) = \inf_Z O(Z,f)}$$

wobei sich Supremum und Inf über alle Zerlegungen von Q erstrecken.

- Ist f integrierbar, dann ist der gemeinsame Wert von sup und inf das Integral von f über Q

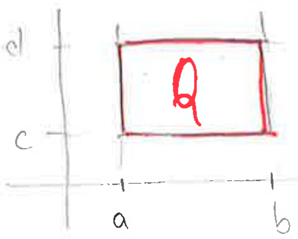
$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \quad \text{oder} \quad \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\cdots dx_1$$

Satz (Fubini): Ist f stetig auf Q, so gilt

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1}\underbrace{\left(\int_{a_2}^{b_2}\cdots\underbrace{\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\right)}_{f_1(x_1,\dots,x_{n-1})}\cdots dx_2\right)}_{f_n(x_1)}dx_1$$

Das Integral kann durch n-sukzessive 1-dimensionale Integrationen nach dem Variablen $x_n, \dots, x_1$ berechnet werden.

Bsp: $Q = [a,b] \times [c,d]$; $f(x,y)$ stetig auf Q
$n=2$



Sei $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, für $y \in [c,d]$

$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, für $x \in [a,b]$

f stetig auf Q

$\Rightarrow \begin{cases} G(y) \text{ ist stetig auf } [c,d] \text{ und} \\ F(x) \text{ stetig auf } [a,b] \end{cases}$

und es gilt

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d G(y)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx .$$

D.h. wir berechnen

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Bsp: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$; $Q = [0,1] \times [2,3]$

$f(x,y) = 6x^2 y$.

$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = ?$

$$* \begin{cases} F(x) = \int_2^3 6x^2 y\,dy = 6x^2 \int_2^3 y\,dy = 6x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_2^3 = 15x^2 \\ F : [0,1] \to \mathbb{R} \ ; F(x) = 15x^2 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} G(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = 6y \int_0^1 x^2 = 6y \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2y \\ G : [2,3] \to \mathbb{R} \ ; G(y) = 2y \end{cases}$$

$$\int_Q f(x,y) = \int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 15x^2\,dx = 15 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 5$$

$$= \int_2^3 G(y)\,dy = \int_2^3 2y\,dy = 2\frac{y^2}{2} \Big|_2^3 = 9-4 = 5$$

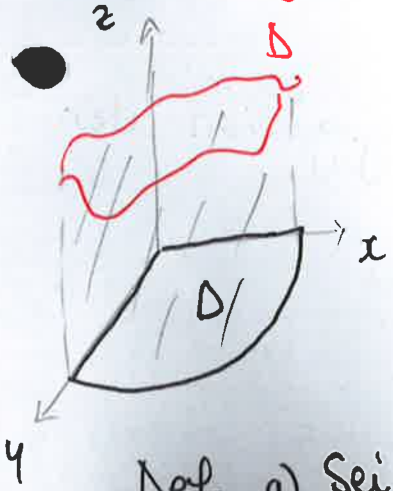
Frage: Bisher f war auf Parallelipipede Q definiert und $\int_Q f = ?$

Wie integriert man f über andere Bereiche?

Bsp.: Volumen des Körpers K über dem Viertelkreis?

$$D = \{(x, y, \overset{z=f(x,y)}{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1 \,,\, 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\int_D f(\vec{x})\,d\vec{x} = ?$$



Def a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion von D ist

$$\mathbb{1}_D : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\} :$$

$$\mathbb{1}_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in D \\ 0, & \vec{x} \notin D \end{cases}$$

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und Q ein beliebiges Parallelipiped mit $D \subset Q$.

D heißt messbar wenn die charakteristische Fkt $\mathbb{1}_D$ auf Q integrierbar ist.

Der Inhalt (Maß) von D ist dann

$$\boxed{\mathrm{Inh}(D) := \int_Q \mathbb{1}_D(\vec{x})\,d\vec{x}}$$

oder Volumen von D

(c) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und meßbar und $f: D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt f integrierbar auf D, wenn die Funktion $f \cdot \mathbb{1}_D$ auf Q integrierbar ist, wobei Q ein beliebiges Parallelepiped mit $D \subseteq Q$ ist.

Wir definieren

$$\boxed{\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x}) \cdot \mathbb{1}_D(\vec{x})\, d\vec{x}} = \int_D 1\, dx$$

! $\operatorname{Inh}(D)$ und $\int f(\vec{x})\, d\vec{x}$ sind unabhängig von der spezifischen Wahl von $Q \supseteq D$.

Eigenschaften

- Linearität und Additivität

Wenn f, g integrierbar auf D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_D \left(\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})\right) d\vec{x} = \alpha \int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} + \beta \int_D g(\vec{x})\, d\vec{x}}$$

- Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, meßbar und $D \cap E = \emptyset$:

$$\boxed{\int_{D \cup E} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_E g(\vec{x})\, d\vec{x}.}$$

falls f integrierbar auf $D \cup E$.

- **Monotonie** $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in D \Rightarrow$

$$\int_D f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq \int_D g(\vec{x})\,dx$$

- **Positivität** : $f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in D \Rightarrow \int f(\vec{x})\,d\vec{x} \geq 0$

Meßbarkeit und Nullmengen

Def : Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ wenn $\mathrm{Inh}(A) = 0$

Bedeutung: die Fläche ist 0 im $\mathbb{R}^2$

Bsp

(i) $A = [0,1]$ hat in $\mathbb{R}$ $\mathrm{Inh}(A) = 1$ = Länge

(ii) $B = \{(x,0) : x \in [0,1]\}$ ist ein Segment in $\mathbb{R}^2$

B ist Nullmenge in $\mathbb{R}^2$

(iii) in $\mathbb{R}^3$: Nullmengen haben Volumen $= 0$

(iv) Unstetigkeitsstellen einer Fkt. = Nullmenge.

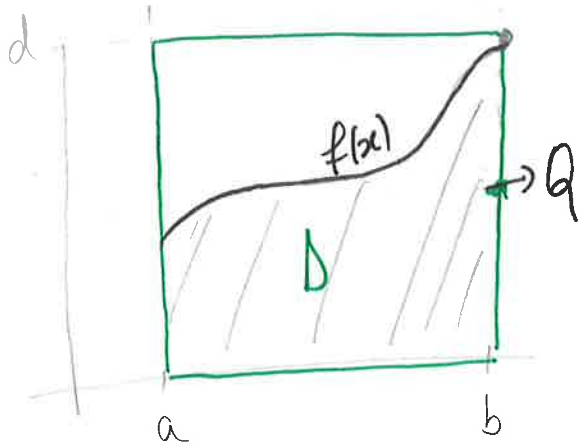
Satz : Ist $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parallelipiped und $f : P \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist der Graph von f

$$\boxed{G_f = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P \\ y = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array} \right\}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

- Jede endliche Menge ist eine Nullmenge.

Bsp: Sei $f : [a,b] \to [0,d]$ eine stetige Fkt



Sei $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in [a,b] \\ 0 \le y \le f(x) \end{array} \right\}$

$Q = [a,b] \times [0,d]$

$D \subseteq Q$

$$\mathrm{Inh}(D) = \int_Q \mathbb{1}_D(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_a^b \left(\int_0^d \mathbb{1}_D(x,y)\, dy \right) dx \;=$$

$$\mathbb{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le f(x) \\ 0, & f(x) < y \le d \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_D : [0,d] \to \{0,1\} \;; \qquad x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \int_0^d \mathbb{1}_D(x,y)\, dy = f(x)$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx = \mathrm{Inh}(D)$$

FLÄCHENINTEGRALE

Frage: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad \int_D f(\vec{x})\,d\vec{x} = ?$

Für die folgenden Mengen lässt sich das Doppelintegral auf 1D - Integrale zurückführen:

De Die folg. Mengen = Normalbereiche

a) Seien $y_1(x) \leq y_2(x)$ 2 stetige Fkt für $x \in [a,b]$ und

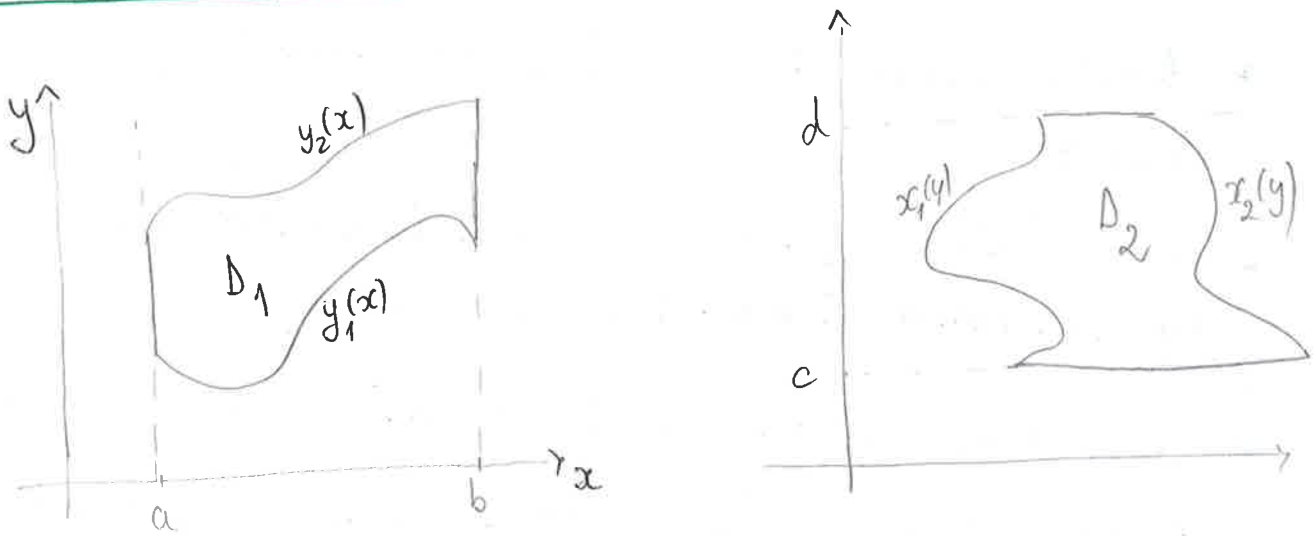
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \; ; \; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

Normalbereich bezüglich y

b) Seien $x_1(y) \leq x_2(y)$ 2 stetige Fkt für $y \in [c,d]$ und

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \; ; \; x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

Normalbereich bezüglich x



• Wir wollen stetige Fkt f auf D_1, D_2 integrieren. Da f stetig ist, wir können zuerst nach x und danach nach y integrieren, oder umgekehrt.

Flächenintegrale über Normalbereiche

a) Sei $f: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig

$D_1 \to$ Normalbereich bezüglich y. Dann

$$\int_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

b) Sei $f: D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $D_2 \to$ Normalbereich bezüglich x. Dann

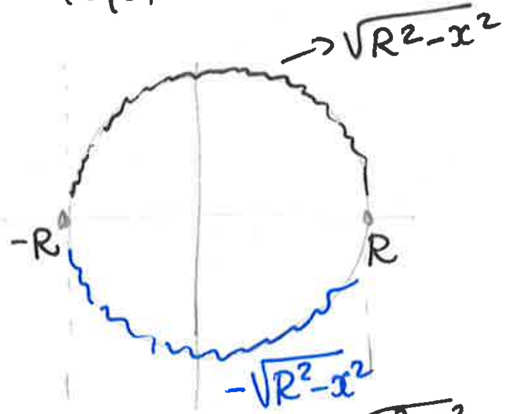
$$\int_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Bemerkungen:

- Zuerst innere Integration durchführen, danach äußere.
- Die Variable, über die nicht integriert wird, wird als konstanter Parameter angesehen.
- Nach dem Integrieren über eine Variable x, kommt diese Variable nicht mehr im Ergebnis vor.
- Falls D keine der Form D_1 oder D_2 besitzt, so muss man D in mehrere Teilbereiche zerlegen.
- $\boxed{\text{Für } f(x,y) = 1 : \iint_D 1\, dx\, dy = \text{Flächeninhalt von } D}$

Beispiele Flächeberechungen.

Bsp 1: Zu berechnen: Flächeninhalt eines Kreises um $(0,0)$ mit Radius R. $= \{(x,y) \mid -R \le x \le R;\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$



D = Kreis als Normalbereich darstellen

$$\text{Inh}(D) = \int_D 1\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2=R^2 \Rightarrow y^2 = R^2-x^2$$

$$\text{Inh}(D) = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy\right)dx = \int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R^2-x^2}\right)dx$$

$$= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2R\int_{-R}^{R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx \;\ominus$$

Subst: $\frac{x}{R} = \sin t \Rightarrow x = R\sin t$

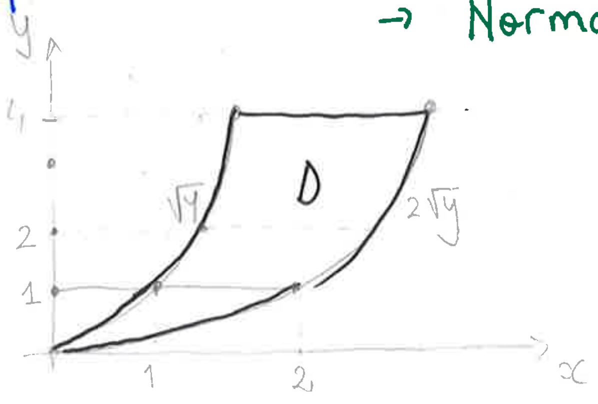
$\boxed{dx = +R\cos t\,dt}$

$x=-R \Rightarrow \sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$$\ominus\ 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos^2 t}\,R\cos t\,dt = 2R^2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt}_{\text{P.I} = \frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

Bsp 2 Sei $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4;\ \sqrt{y} \le x \le 2\sqrt{y}\}$

→ Normalbereich bezüglich x

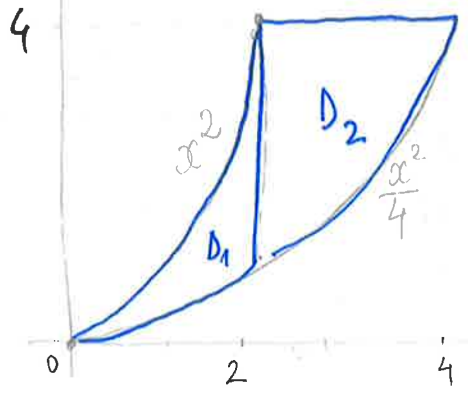


$x_1(y) = \sqrt{y} \Rightarrow x_1^2 = y$

$x_2(y) = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{x_2^2}{4} = y$

$$\text{Inh}(D) = \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} 1\,dx\,dy = \int_0^4 \sqrt{y}\,dy = y^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

Oder : Zerlege D in 2 Teilbereiche, die Normal bezüglich y sind



$$D_1 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le x^2 \end{array} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 2 \le x \le 4 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le 4 \end{array} \right\}$$

$$\int_D 1 \, dx\,dy = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{x^2} 1 \, dy \, dx + \int_2^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{4} 1 \, dy \, dx = \frac{16}{3}$$

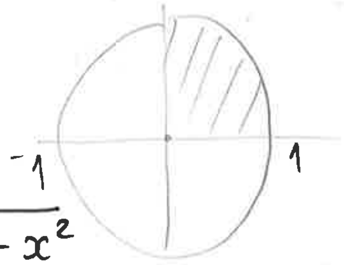
Bsp 3 Volumen des Körpers in $\mathbb{R}^3$

$$K = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} \overbrace{x,y \ge 0 \, , \, x^2 + y^2 \le 1}^{D} \\ 0 \le z \le \underbrace{xy}_{f(x,y)} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D = \{(x,y) : x,y \ge 0 \, , x^2+y^2 \le 1\} \\ f(x,y) = xy \quad : \quad \int_D f = ? \end{array}}$$

$$\mathrm{Vol}\, K = \int_D f(x,y) \, dx\,dy$$

$$D = \{ x,y \ge 0 \, ; x^2 + y^2 \le 1 \}$$

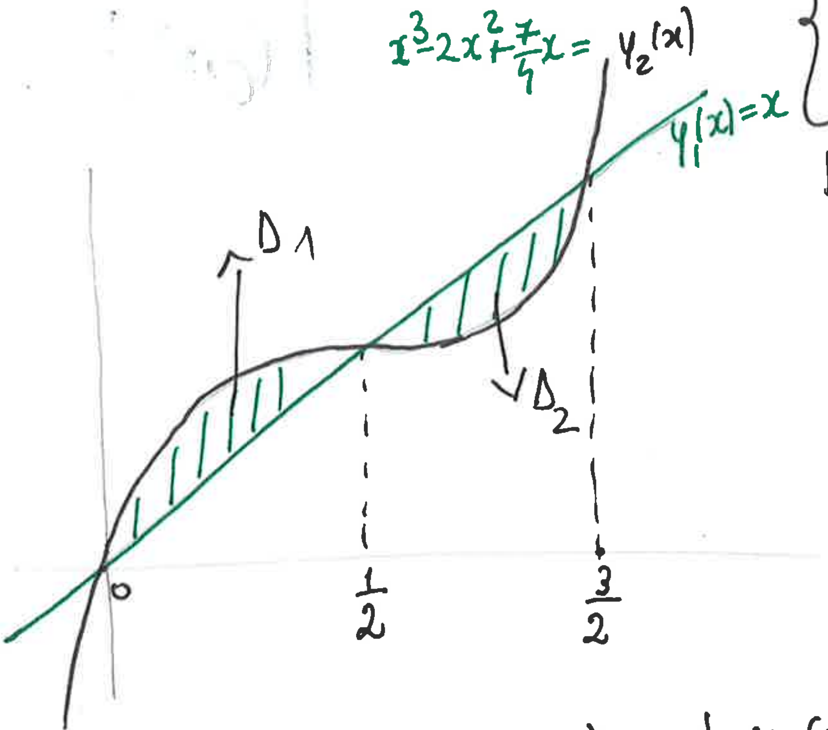


$$= \{ x,y : 0 \le x \le 1 ; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_D f(\vec{x}) dx = \mathrm{Vol}(K) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \, \frac{1-x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \frac{1}{8}$$

Bsp 5: Fläche von D = durch die Kurven $\begin{cases} y_1(x) = x & \text{und} \\ y_2(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{7}{4}x \end{cases}$ beschränkter Bereich.



Schnittpunkte von $y_1(x)$ und $y_2(x)$: $y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow$
$x \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$D = D_1 \cup D_2$

$$\int_D 1 \, dx\, dy = \underbrace{\int_{D_1} 1 \, dx\, dy}_{F_1} + \underbrace{\int_{D_2} 1 \, dx\, dy}_{F_2}$$

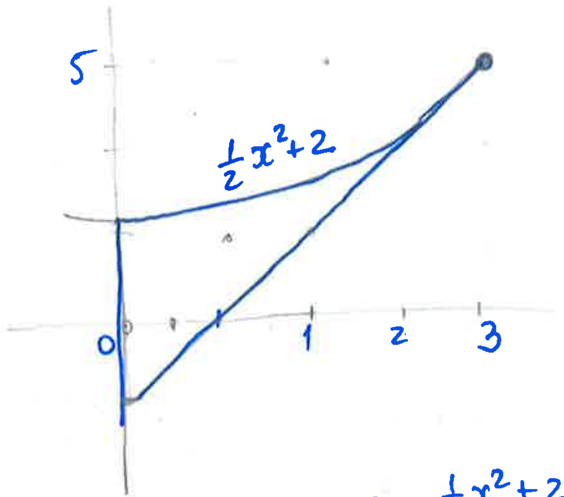
$\boxed{F_1}$: $$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1 \, dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x\right) dx = \frac{5}{192}$$

$\boxed{F2}$ $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} 1 \, dy\, dx = \int_{x=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^3 + 2x^2 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{11}{96}$$

$$\Rightarrow \int_D 1 \, dx\, dy = \frac{5}{192} + \frac{11}{96} = \frac{6}{94}$$

Bsp 4: Flächeninhalt: durch die Kurven $x=0$, $y=2x-1$ und $y=\frac{1}{2}x^2+2$ berandet.

$D=?$



Schnittpunkt Parabel $y=\frac{1}{2}x^2+2$ mit Geraden $y=2x-1$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}x^2+2=2x-1 \Rightarrow$

$x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow$ $\boxed{x=3}$

$D=\{(x,y) : 0\le x\le 3;\ 2x-1\le y\le \frac{1}{2}x^2+2\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3\int_{2x-1}^{\frac{1}{2}x^2+2} 1\,dx\,dy = 3$$

DREIFACHINTEGRALE (Volumenintegrale)

Def: Normalbereiche $M\subseteq\mathbb{R}^3$ (ähnlich wie $\mathbb{R}^2$)

Sei $f: M\to\mathbb{R}$ stetig. Für die folgenden Spezialfälle normaler (regulärer) Mengen M können die Volumenintegrale berechnet werden.

a) Gilt

$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in D,\quad z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$

wobei $\begin{cases} D = \text{Normalbereich in } \mathbb{R}^2 \\ z_1\le z_2 \text{ stetige Fkt auf } D\end{cases}$ dann

$$\iiint_M f\,dx\,dy\,dz = \iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

- Analoge Aussagen gelten für
  $y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z)$ bzw für $x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)$

b) Gilt

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b \;, y_1(x) \le y \le y_2(x) \,, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$

wobei $y_1(x) \le y_2(x)$ stetig auf $[a,b]$

$z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ stetige Fkt von

$(x,y) \in D = \{ a \le x \le b \;, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

dann

$$\boxed{\iiint_M f \, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx}$$

- Auch hier gelten die Aussagen mit vertauschten Variablen.

! $\boxed{\text{Falls } f \equiv 1 \text{ erhalten wir } Vol(M)}$

Bsp

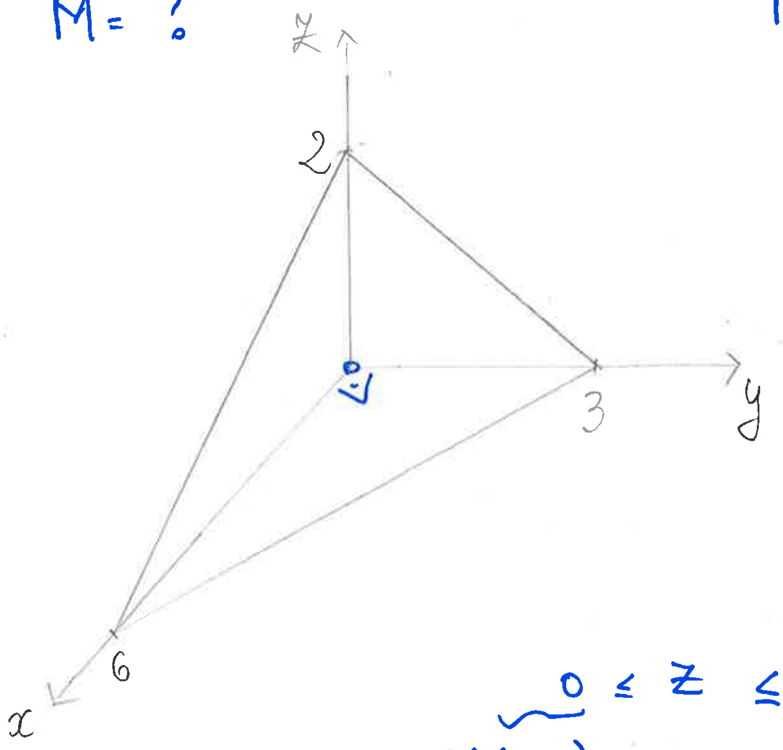
Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) eines Körpers K mit Massenverteilung $\rho(x,y,z)$:

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{1}{V} \displaystyle\iiint_K x\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ y_s = \dfrac{1}{V} \displaystyle\iiint_K y\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ z_s = \dfrac{1}{V} \displaystyle\iiint_K z\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ V = \displaystyle\iiint_K \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

Beispiel: Pyramide begrenzt durch die Koordinatenebenen und die Ebene $\boxed{x+2y+3z=6}$

Massenverteilung $\rho \equiv 1 \Rightarrow V = Vol(M)$

$M = ?$



M = als Normalbereich darstellen

$$x, y, z \geq 0$$

$$\boxed{y \in [0,3]}$$

$$x_1(y) = 0 \leq x \leq 6 - 2y - 3z \leq 6 - 2y = x_2(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq 6-2y}$$

$$\underbrace{0}_{z_1(x,y)} \leq z \leq \underbrace{\tfrac{1}{3}(6-x-2y)}_{z_2(x,y)}$$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq x \leq 6-2y,\ 0 \leq z \leq \tfrac{1}{3}(6-x-2y)\}$$

$Vol(M) =$ Grundfläche $\times$ Höhe $\cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 2 =$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot \cancel{9}3 = 6$$

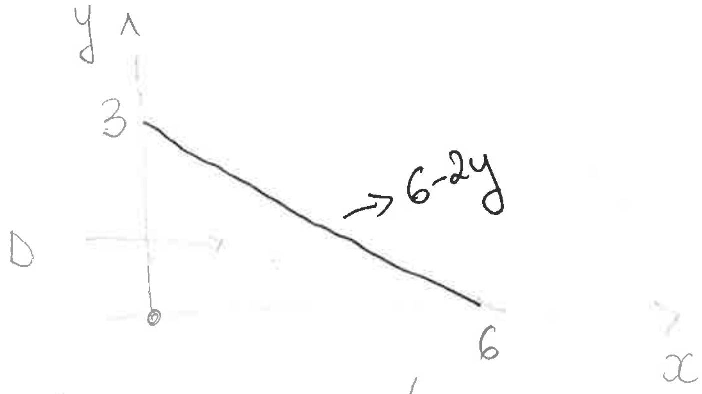
Schwerpunkt:

$$x_S = \frac{1}{6} \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\int_0^{\frac{1}{3}(6-x-2y)} x \cdot dz \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^3 \int_0^{6-2y} x \, \tfrac{1}{3}(6-x-2y)\, dx\, dy = \frac{1}{18} \int_0^3 \left(6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2y\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{6-2y} dy$$

$$= \frac{3}{2} \quad ; \quad y_S = \frac{3}{4} \quad ; \quad z_S = \frac{1}{2}$$

(E) $(6,0,0)$
$(0,3,0)$
$(0,0,2)$

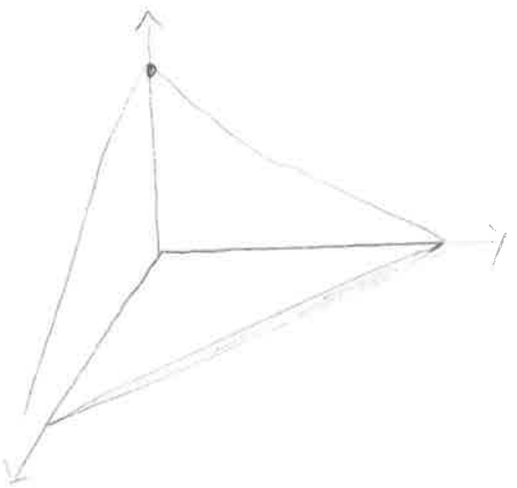


$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3$
$0 \leq x \quad 6-2y \}$

Gerade durch $(6,0)$ und $(0,3)$: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-3}{0-3} \Leftrightarrow$

$-3 \cdot x = 6(y-3) \mid : -3 \Rightarrow \boxed{x = 6-2y}$

$z = \frac{1}{3}(6-x-2y)$



SUBSTITUTION FÜR MEHRFACHINTEGRALE

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, beschränk und $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte (meßbare) Menge.

<u>Frage</u>: $\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = ?$

- <u>Substitution</u>: $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n) \longrightarrow \vec{u} = (u_1, \dots u_n)$
  Ursprungliche Var — neue Var.
- Stellen $\vec{x}$ als Funktion von $\vec{u}$ dar.

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1 \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1 \dots, u_n) \end{cases}$$

$\vec{x}(\vec{u}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Vektorfeld)

- Die Zuordnung muss <u>bijektiv</u> sein.

- Gebiet D in $(x_1, \dots, x_n)$ Koordinatensystem wird zu einem Gebiet E in $(u_1, \dots u_n)$ Koordinatensystem transformiert.

- Transformation des Inhaltselements. ($dx = \, ? \, du$?)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Flächenelement}}}{d\vec{x}} = dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \longrightarrow \underbrace{\left| \frac{\partial(x_1 \ldots, x_n)}{\partial(u_1 \ldots u_n)} \right|}_{\text{Jacobi-determinante}} \partial u_1 \cdots \partial u_n$$

$$\vec{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Jacobi-Matrix}}}{J_{\vec{x}}(u_1 \ldots, u_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

$$|J_{\vec{x}}(\vec{u})| = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}} \right)$$

- Es gilt dann

$$\int_D f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_E f(\vec{x}(\vec{u})) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}} \right| d\vec{u}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int_D f(x_1 \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n = \int_E f(x_1(u_1 \ldots u_n), \ldots x_n(u_1 \ldots, u_n)) \cdot |\det J| \cdot du_1 du_2 \ldots du_n}$$

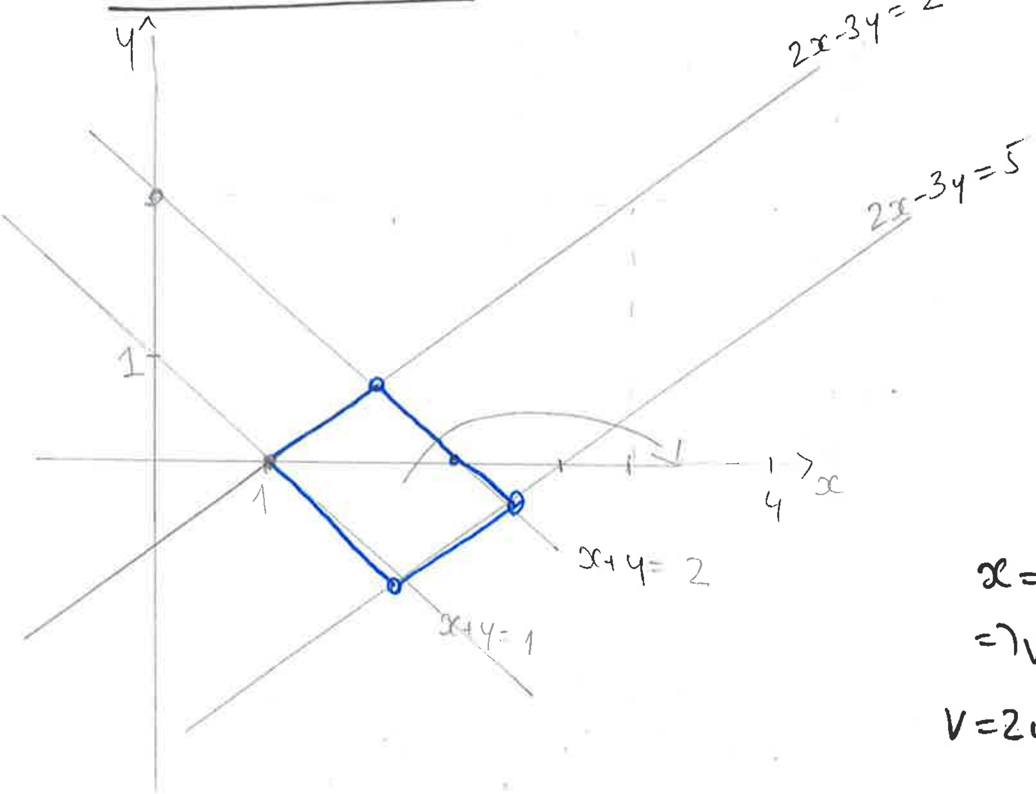
<u>Beachte</u>: das äußere Integral immer feste Grenzen hat.

Bsp: Sei D das durch die Geraden

$x+y=1$, $x+y=2$, $2x-3y=2$ und $2x-3y=5$

bestimmte Parallelogram. und $f(x,y)=x^2y$

$\boxed{\int_D f(x,y)\,dx\,dy}$ durch Substitution



Sei $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-3y \end{cases}$

$u \in [1,2]$

$v \in [2,5]$

$x = u-y$

$\Rightarrow v = 2(u-y) - 3y \Rightarrow$

$v = 2u - 5y \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5}(2u-v)}$

$x = u - y = u - \frac{1}{5}(2u-v) \Rightarrow x = \frac{1}{5}(3u+v)$

$$\begin{cases} x = x(u,v) = \frac{1}{5}(3u+v) \\ y = \frac{1}{5}(2u-v) \end{cases}$$

$$\vec{x}(u,v) = \left(\frac{1}{5}(3u+v), \frac{1}{5}(2u-v)\right)$$

$$J_{\vec{x}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\vec{x}}(u,v) = |J_{\vec{x}}(u,v)| = \frac{1}{5_5}\cdot(-3) = \frac{-3}{5}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_2 f(x(u,v), y(u,v)) \left|-\frac{3}{5}\right| dv\,du =$$

$f(x,y) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad f(x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{1}{5}(3u+v)\right)^2 \cdot \frac{1}{5}(2u-v)$

$x = \frac{1}{5}(3u+v)$

$y = \frac{1}{5}(2u-v)$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{125}\int_1^2 \int_2^5 (3u+v)^2(2u-v)\cdot\frac{3}{5}\,dv\,du$$

Bsp: Ellipse

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \le 1\right\}$

Flächeninhalt $= \int_D 1\,dx\,dy$

Substitution $\quad x = a\,r\cos\varphi$

$y = b\,r\sin\varphi$

$r\,[0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

$$\mathrm{Inh}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} abr\,d\varphi\,dr = ab\pi$$

FLÄCHENINTEGRALE IN POLARKOORDINATEN

TRANSFORMATION:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$x = x(r,\varphi)$

$y = y(r,\varphi)$

Jacobi Determinante: $J_{\vec{x}}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$dx\,dy = |J_{\vec{x}}(r,\varphi)| \cdot dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

Bsp [Prüfung Mathe B 9/03/2017]

$$I = \int_A \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ y \geq 0,\ y \geq \sqrt{3}x\}$$

Polarkoordinaten: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

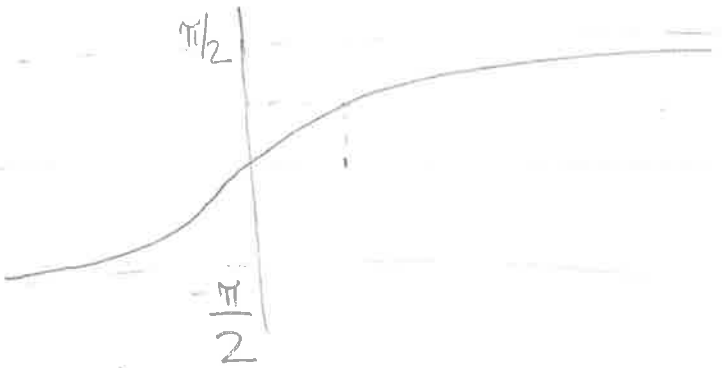
A → transformieren

$1 \leq \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \leq 9 \Rightarrow 1 \leq r^2 \leq 9 \Rightarrow \boxed{1 \leq r \leq 3}$

- $y \geq 0 \Rightarrow r\cdot\sin\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \pi]$

- $y \geq \sqrt{3}x \Rightarrow \cancel{r}\sin\varphi \geq \sqrt{3}\,\cancel{r}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \geq \sqrt{3}$

$$\tan\varphi \ge \sqrt{3} \Rightarrow \varphi \ge \underbrace{\arctan\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$



$$I = \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{r^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \int_1^3 r^2 \sin\varphi \cos\varphi \, dr\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\varphi\, (\sin\varphi)' \left(\frac{r^3}{3}\Big|_1^3\right) d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\varphi\, (\sin\varphi)' \left(\frac{27-1}{3}\right) d\varphi = \frac{26}{3} \frac{(\sin\varphi)^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \frac{26}{\cancel{3}} \left(0 - \frac{\cancel{3}}{8}\right) = -\frac{26}{8}$$

DREIFACHINTEGRALE IN KUGELKOORDINATEN

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Jacobi - Matrix: $J_{\vec{x}}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\left| J_{\vec{x}}(r,\varphi,\theta) \right| = r^2 \sin\theta$$