KURVENINTEGRALE

Ziel: reelwertige Fkt $f(\vec{x})$ über eine stückweise glatte Kurve (stetig oder $\vee$ endlich viele Unstetigkeitsstellen, wo links - und rechtseitigen Grenzwerte existieren)
$K = \{ \vec{x}(t) : a \leq t \leq b \}$ zu integrieren.

- Man berechnet das Kurvenintegral als gewöhnliches Integral über den Parameterbereich $[a,b]$

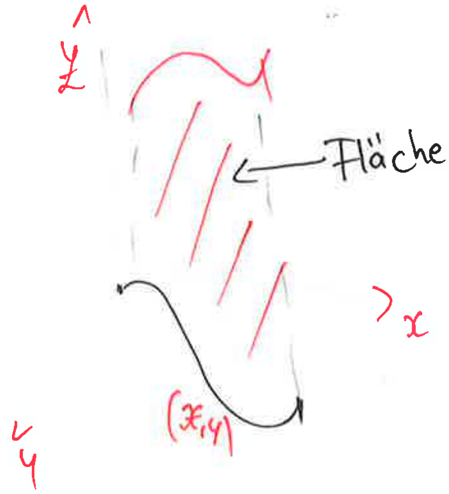
Def: Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $K = \{ \vec{x}(t) \mid a \leq t \leq b \}$ Kurve, so ist eine glatte (oder stückweise glatt) Kurve, so ist

$$\int_K f \, ds := \int_a^b f(\vec{x}(t)) \cdot \| \dot{\vec{x}}(t) \| \, dt$$

Kurvenintegral über K.

$ds = \| \dot{\vec{x}}(t) \| \, dt$ → heißt skalares Bogenelement

Geometrische Interpretation in $\mathbb{R}^2$, $f \geq 0$ → Fläche des Bereichs



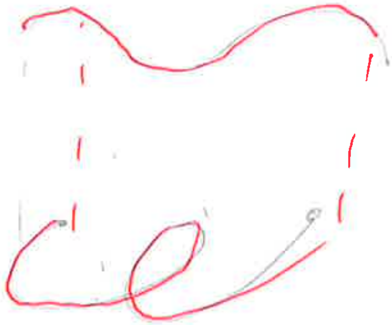
$$\{ (x,y,z) \mid (x,y) \in K, \; 0 \leq z \leq f(x,y) \}$$

- Kurve geschlossen: $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$

Schreibweise $\oint f \, ds$

Bsp: $\int_K xyz \, ds$ wenn die Kurve K

$$K: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi] \rightarrow \text{Schraubenlinie in } \mathbb{R}^3$$



$$\int_K xyz \, ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)) \cdot \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt$$

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_K xyz \, ds = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \cdot t \cdot \sqrt{2} \, dt \underset{\downarrow}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} t \cos 2t \, dt \quad \text{P.I}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

(ARBEITSINTEGRALE) KURVENINTEGRALE VON VEKTORFELDER

Vektorfeld: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Vektorwertige Fkt)

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

K → Kurve

$K = \{\vec{x}(t) \mid a \le t \le b\}$

Dann $\boxed{\int_K \vec{F}\, d\vec{x} := \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle\, dt =}$

$$\int_K \vec{F}\, ds = \int_a^b \left(f_1(x_1(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + f_2(x_2(t)) \cdot \dot{x}_2(t) + \ldots + f_n(x_n(t))\, \dot{x}_n(t) \right) dt$$

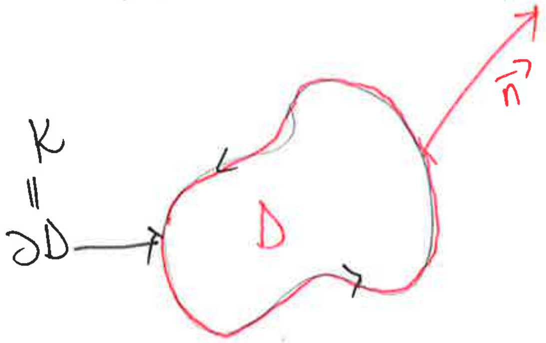
! $K \to$ geschlossen $\oint_K \vec{F}\, ds$ = physikalische Arbeit einer Kraft $\vec{F}$ längs eines Weges K

INTEGRALSÄTZE DER VEKTORANALYSIS [GAUSS, GREEN, STOKES]

$\boxed{1}$ GAUSS : Zusammenhang zwischen Kurvenintegrale und Integrale über Bereiche D : $\int_D f(\vec{x})\, dx$

$$\underbrace{\int_D f(\vec{x})\, dx}_{} = \oint_K \ldots\, ds$$

• Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, Gebiet (Normalbereich), beschränkt mit Rand $K = \partial D$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve.



$K \to$ Kurve in $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Durchlauf $\to$ entgegen dem Uhrzeiger.

Satz von Gauss in der Ebene

$D \subset$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Vektorfeld : $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Kurve in $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t \in [a,b]$

$K = \partial D$

Dann:

$$\boxed{\int_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\, dy = \oint_K \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds}$$

$$\int_a^b \left(f_1(x(t),y(t)) \cdot \dot{y}(t) - f_2(x(t),y(t)) \cdot \dot{x}(t) \right) dt$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \underbrace{\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2}}_{} = f(x,y)$$

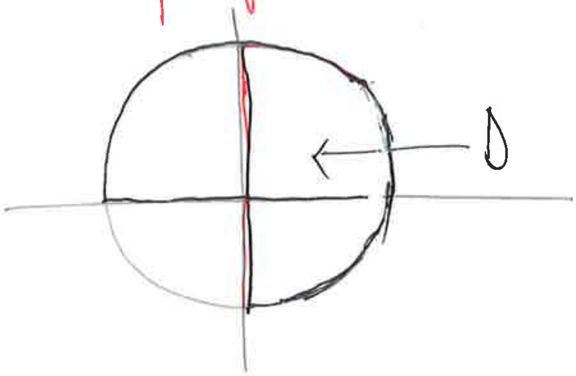
$\vec{n} \to$ Normalvektor an K (auf Länge 1 normiert)

$\vec{n} = \begin{pmatrix} +\dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$ (nach außen gerichtet)

BSP Sei $D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0 \}$

$F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x y^2 \\ x^2 y \end{pmatrix}$

Überprüfen Sie den Satz von Gauss!



Es bieten sich Polarkoord an!

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix}$; $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$

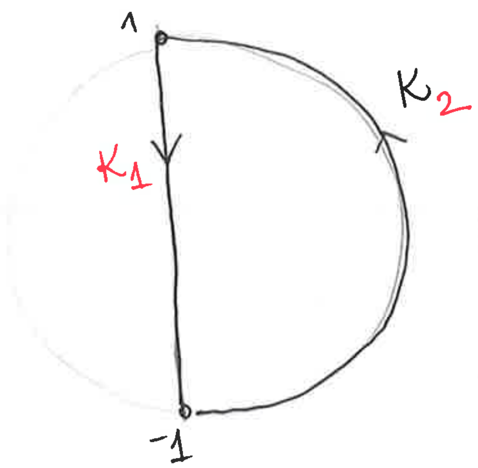
$= y^2 + x^2$

Links (Satz von Gauss)

$$\int_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy = \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 r^3 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\varphi \right) dr = \pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{4}$$

Rechts (Satz von Gauss)



$K \to$ parametrisieren ?

$K = K_1 \cup K_2$

$$\begin{cases} K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, & t \in [-1,1] \\ K_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\oint_K \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle\,ds = \int_{K_1} \langle \vec{F}, \vec{n}_1 \rangle\,ds + \int_{K_2} \langle \vec{F}, \vec{n}_2 \rangle\,ds =$$

$\vec{n}_1$: NormalVektor zu K_1 : $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_2$ $\qquad K_2$: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$$= \int_{-1}^{1} 0\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t \cdot \sin^2 t\,dt = 2\left[\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Auf K_1: $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Auf K_2 : $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos t \sin^2 t \\ \cos^2 t \sin t \end{pmatrix}$

In Satz von Gauss

$\vec{F}$ durch $\vec{F}^{\perp} = \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}$ ersetzen

und $\operatorname{rot} \vec{F} := \operatorname{div} \vec{F}^{\perp}$ $\Rightarrow$ Satz von Stokes in der Ebene

Satz von Stokes [= Integralsatz von Green-Riemann]

$$\iint_D \underline{\operatorname{rot} \vec{F}}\, dx\, dy = \oint_K \vec{F}\, ds$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} := \operatorname{div} \vec{F}^{\perp}}$$

Green Formeln

D und $K = \partial D$ wie oben, f, g zweimal diff.'bare Fkt die auf einem $D \cup K$ umfassenden Gebiet definiert sind. Dann

(1) $$\iint_D (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, dx\, dy = \oint_K f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds$$

(2) $$\iint_D (f \Delta g - g \Delta f)\, dx\, dy = \oint_K \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) ds$$

mit: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \langle \nabla f, \vec{n} \rangle}$ $\rightarrow$ Richtungsableitung

I : DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (DGL)

EINLEITUNG

DGL = Gleichung , in welcher unabhängige Variablen, Funktionen, und Ableitungen von Fkt. auftreten.

★ Die gesuchten Unbekannten sind dabei Fkt. $y(x)$ einer Var. bei gewöhnlichen DGL. und Fkt $f(x_1, x_2, \dots)$ in mehrere Var bei partiellen DGL.

Bsp: $y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow y'(x) + 2x\, y(x) = 0$

- x die Var
- $y = y(x)$ die gesuchte Fkt.
- Lösung ist eine Fkt die die obige Gleichung erfüllt.

zB: $y(x) = e^{-x^2} \Rightarrow y'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$$y'(x) + 2x \cdot y(x) = -2x e^{-x^2} + 2x\, e^{-x^2} = 0$$

Alle Lösungen dieser DGL haben die Form

$$y(x) = c \cdot e^{-x^2} \; ; \; c \in \mathbb{R}$$

Allgemeine DGL n-ter Ordnung lautet :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Ordnung der DGL = die Ordnung des höchsten in einer DGL vorkommenden Ableitung.

Explizite DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Lineare DGL n-ter Ordnung:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) +$$
$$a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

Spezialfälle:

- lineare homogene Gleichung $f(x) = 0$
- lineare inhomogene Gleichung $f(x) \neq 0$
- mit Konstanten Koeffizienten : $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ = Konst.

Bsp

(1) $y \cdot y' - x = 0$ implizite DGL

(2) $y''' + 4x^2 y'' + 2e^{-x} y' + 3x y = x^2$

→ lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

(3) $y'' + 3y' + 5 = \sin x$ → lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit Konstanten Koeff.

Lösung der DGL (oder Lösungskurve, oder Integral der DGL) ist eine Fkt $y(x)$ auf ein Intervall I, n-Mal stetig diff'bar, die mit ihren Ableitungen in die DGL eingesetzt, erfüllt für alle $x \in I$ die DGL.

! DGL integrieren heißt alle Lösungen zu bestimmen.

Bsp: $y' = \cos x \cdot y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot y^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{y^2} dy = \cos x \, dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos x \, dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{y} = \sin x + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{\sin x + c}} \quad c \in \mathbb{R}.$

$\downarrow$

Allgemeine Lösung

Spezielle Lösung: einzelne Lösung, die keine frei wählbaren Konstanten enthält. (auch partikuläre Lösung genannt) Allgemeine Lösung: enthält n frei wählbare Parameter.

ANFANGSWERTPROBLEM, AWP

DGL: Um die n frei wählbaren Parameter in die allgemeine Lösung festzulegen, benötigt man n zusätzliche Bedingungen

AWP: $\begin{cases} y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

x_0 = Anfangspunkt

Bsp. $\begin{cases} y' = x^2 + \tanh y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Lösung?

Existenz der Lösung:

- Lokal: Hat das AWP in der Umgebung des Anfagspunktes $(x_0, y_0 \ldots, y_{n-1})$ eine Lösung?
- Global: $\exists$ die lokale Lösung für alle x in einem vorgegebenen Interval?

Eindeutigkeit: Ist die Lösung eindeutig?

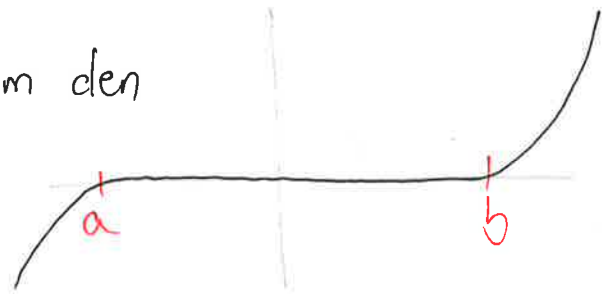
Existenzsatz von Peano

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ist $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ so geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ (mindestens) eine Lösung der DGL: $\boxed{y' = f(x,y)}$

Bsp (1) $\boxed{y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0}$

Dann ist $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2, & x > b \\ 0, & a \le x \le b \\ -\frac{1}{4}(-x+a)^2, & x < a \end{cases}$; für $\boxed{\begin{matrix} a < 0 \\ b > 0 \end{matrix}}$

für jedes Interval (a,b) um den Nullpunkt



- $y(x)$ ist diff'bar.

$$y'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-b), & x > b \\ 0, & a \le x \le b \\ -\frac{1}{2}(-x+a, & x < a \end{cases}$$

$$|y(x)| = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2, & x > b \\ 0, & a \le x \le b \\ \frac{1}{4}(-x+a)^2, & x < a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|y(x)|} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-b), & x \ge b \\ 0, & a \le x \le b \\ \frac{1}{2}(-x+a), & x < a \end{cases}$$

$$\sqrt{|y(x)|} = y'(x)$$

$\Rightarrow \forall \quad a < 0 < b$ ist $y(x)$ eine Lösung der DGL. mit $y(0) = 0 \Rightarrow$ Das AWP $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ nicht eindeutig lösbar.

! Wann ist die Lösung für das AWP eindeutig?

Bsp vorher: $f(y) = \sqrt{|y|}$ stetig, Lösung nicht eindeutig

Stetigkeit nicht genug für Eideutigkeit der Lösung des AWP

Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

AWP: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ (x_0, y_0) \in D, \; D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ offen} \end{cases}$

Def: (a) Die Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ erfüllt auf D eine globale Lipschitzbedingung bezüglich y, wenn es eine Konstante $L \ge 0$ gibt (Lipschitz konst) so dass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in D$:

$$\boxed{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|}$$

(b) f erfüllt auf D bezüglich y eine <u>lokale Lipschitzbedingung</u>, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$, eine Umgebung $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0, y_0)$ gibt und eine Konstante $L = L_{\mathcal{U}}$ gibt, sodass

$$\boxed{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L_{\mathcal{U}} \cdot |y_1 - y_2|}, \quad \forall \begin{matrix}(x,y_1)\\(x,y_2)\end{matrix} \in \mathcal{U}$$

<u>Bsp:</u> (1) $f(x,y) = x^2 + y^2$ auf $\mathbb{R}^2$

(*) Erfüllt f eine lokale (globale) Lipschitzbedingung?

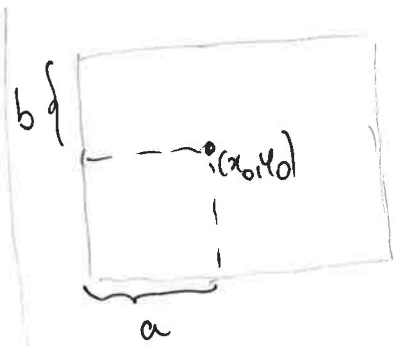
$$\left| \frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} \right| = \left| \frac{\cancel{x^2} + y_1^2 - \cancel{x^2} - y_2^2}{y_1 - y_2} \right| = \underbrace{|y_1 + y_2|}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ nach oben nicht beschränkt.

$\Rightarrow$ <u>Nein</u> (Keine globale) Lipschitzkonst.

(*) <u>Lokale</u>: Rechteckt

$$Q = \{(x,y) : |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}$$



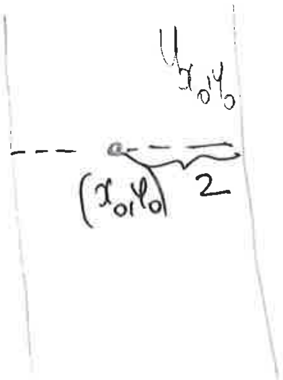
Im Rechteck ist

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} = |y_1 + y_2| \le \underbrace{2(b + |y_0|)}_{L}$$

Bsp (2) $f(x,y) = x \cdot y$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x| \cdot |y_1 - y_2|$ Keine globale Lipschitzkonst auf $\mathbb{R}^2$, da auf $\mathbb{R}^2$ $|x|$ nach oben nicht beschränkt

Lokal: Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ und Streifen um (x_0,y_0)



$$U_{(x_0,y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R},\ x_0 - 2 \le x \le x_0 + 2\}$$

$$\Rightarrow \quad |x| \le \underbrace{|x_0| + 2}_{L}$$

Im Streifen ist $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \underbrace{(|x_0|+2)}_{L} \cdot |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ lokal Lipschitz.

Hinreichende Bedingung

(a) $f_y(x,y)$ beschränkt auf $D \Rightarrow f$ erfüllt in D eine globale Lipschitzbedingung bezüglich y.

(b) Hat f eine stetige partielle Ableitung $f_y(x,y)$ $\Rightarrow$ f erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y.

Bsp (1) Vorher $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f_y(x,y) = 2y$ nicht beschränkt $\Rightarrow$

Keine globale Lip-Bdg; aber $f_y(x,y) = 2y$ stetig $\Rightarrow$ lokale Lip. Bdg.

(2) $f(x,y) = x \cdot y$

$f_y(x,y) = x$ $\rightarrow$ nicht beschränkt $\Rightarrow$ Keine globale Lip.

$\searrow$ stetig $\Rightarrow$ lokale Lip. Bdg

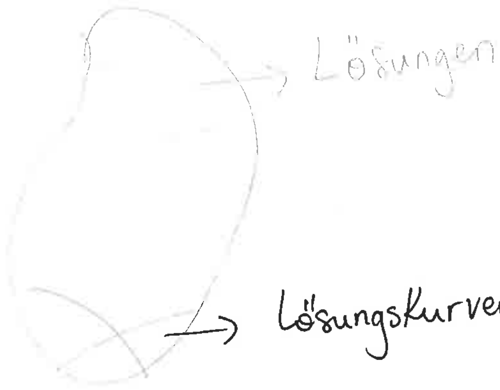
$\boxed{\text{Eindeutigkeitssatz}}$: f global Lipschitz auf D $\Rightarrow$ (AWP) * hat eindeutige Lösung

Existenz und Eindeutigkeitzsatz :

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und f erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann gibt es $\forall\ (x_0, y_0) \in D$ für das

$$\text{(AWP)}: \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

eine eindeutige Lösungskurve, die sich beidseitig bis zum Rand von D erstreckt.



$\rightarrow$ Lösungskurven schneiden sich nicht.

Bsp : AWP $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$y' = y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \dfrac{1}{y^2}\, dy = dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1\, dx \Rightarrow$

$\dfrac{y^{-1}}{-1} = x + c \Rightarrow -\dfrac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = \dfrac{-1}{x+c}$

$y(0) = y_0 \Rightarrow \dfrac{-1}{c} = y_0 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{y_0} \Rightarrow$

$y(x) = \dfrac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x} \Rightarrow \boxed{y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x}}$

$f(x,y) = y^2$ lokal Lipschitz, nicht global

LÖSUNGSMETHODEN

1. TRENNUNG DER VARIABLEN

DGL der Form $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$ nennt man DGL mit getrennten Variablen.

Lösungen $\Rightarrow$ $y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx}$$

Bsp: $y' = \frac{-x}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{-x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1/y}_{g(y)} \Rightarrow$

$y\, dy = -x\, dx \Rightarrow \int y\, dy = \int -x\, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow y^2 = -x^2 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{-x^2 + C}$

oder $\boxed{y^2 + x^2 = C}$, $C > 0$

2. SUBSTITUTION

Geeignete Substitution in DGL $\Rightarrow$ eine neue DGL, vereinfacht

Bsp
AWP: $\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x-y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

$$\boxed{y' = \frac{1}{1+x-y}} \quad (*)$$

Substitution : $z(x) = 1 + x - y(x) \Rightarrow z' = 1 - y' \Rightarrow$

$y' = 1 - z'$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow 1 - z' = \frac{1}{z} \Rightarrow z' = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{z-1}{z}}_{f(z)} \cdot \underbrace{1}_{f(x)} \xrightarrow[\text{TDV}]{} \int \frac{z}{z-1}\, dz = \int 1\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) dz = x + c \Rightarrow z + \ln|z-1| = x + c$$

Rücksubst : $1 + \cancel{x} - y + \ln|\cancel{1} + x - y - \cancel{1}| = \cancel{x} + c \Rightarrow$

$$\boxed{-y + \ln|x-y| = k} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

$y(0) = -1 \Rightarrow +1 + \ln\underbrace{|\quad -1|}_{0} = k \Rightarrow \boxed{k = 1}$

Lösung implizit : $\ln|x-y| = y + 1 \Rightarrow x - y = e^{y+1} \Rightarrow$

$$\boxed{x = y + e^{y+1}}$$

3. HOMOGENE DGL

Hom DGL : $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Substitution : $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow z'(x) = \frac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2}$

$y(x) = z\,x$ und $y'(x) = z'(x) + z(x)$

Bsp : $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$

$z(x) = \frac{y(x)}{x}$; $z\,x = y \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

Einsetzen: $z' \cdot x + z = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \underbrace{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2z} - z}_{-\frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z}}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z}}_{f(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \Rightarrow \text{TDV}$$

$$\int \frac{2z}{z^2+1}\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln(z^2+1) = -\ln|x| + c \Rightarrow$$

$z^2 + 1 = \frac{c}{x} \Rightarrow$ Rücksubst $\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x} \Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 - cx = 0}$

Implizite Lösung

$$\boxed{\text{4. DGL der Form } y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)}$$

Man betrachte die Geraden

$G_1: ax + by + c = 0$
$G_2: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

2. Fälle
Entweder G_1, G_2 parallel
oder G_1 und G_2 schneiden sich in ein Punkt.

Fall 1: $G_1 \parallel G_2 \Rightarrow$

$G_1, G_2 \rightarrow$ gleiche Steigung

$G_1: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
$G_2: y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$

G_1: Steigung $-\frac{a}{b}$
G_2 $-\frac{\alpha}{\beta}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \lambda \Rightarrow$

$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda\alpha \\ b = \lambda\beta \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = f\Bigg(\underbrace{\frac{\lambda\alpha x + \lambda\beta y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}}_{\parallel}\Bigg)$$

$$\frac{\lambda\left(\alpha x + \beta y + \frac{c}{\lambda}\right)}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{\lambda\left(\alpha x + \beta y + \gamma + \left(\frac{c}{\lambda} - \gamma\right)\right)}{\alpha x + \beta y + \gamma} =$$

$$= \lambda + \frac{\lambda\left(\frac{c}{\lambda} - \gamma\right)}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \lambda \cdot \left[1 + \frac{\frac{c}{\lambda} - \gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right]$$

DGL : $y' = f\left(\lambda \cdot \left(1 + \dfrac{\frac{c}{\lambda} - \gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)\right)$

Subs : $z(x) = \alpha x + \beta y + \gamma$

$\Rightarrow$ DGL : $\boxed{y' = F(\underbrace{\alpha x + \beta y + \gamma}_{\text{Subst}})}$

Fall 2 $G_1 \cap G_2 = \{(x_0, y_0)\}$

Subs : $\begin{cases} x^* = x - x_0 \\ y^* = y - y_0 \end{cases}$

Neue DGL : $(y^*)' = f\left(\dfrac{a + b \cdot \frac{y^*}{x^*}}{\alpha + \beta \cdot \frac{y^*}{x^*}}\right)$

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
04. Juni 2019

Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 1:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Es wird folgende Substitution durchgeführt:

$$z = \frac{y}{x}.$$

Daraus folgt $y = xz$ und

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{z}{x},$$

bzw. nach y' aufgelöst

$$y' = xz' + z.$$

Einsetzen in (1) ergibt

$$xz' + z = f(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \frac{1}{x} \cdot \big(f(z) - z\big). \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung ist nun durch Trennung der Variablen zu lösen und man erhält daraus die Lösung von (1) als $y = xz$.

Beispiel: Man löse

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x}. \tag{3}$$

D.h. es ist $f(t) = \sqrt{t-1} + t$. Eingesetzt in (2) ergibt dies also die neue DGL

$$z' = \frac{1}{x}\Big(\big(\sqrt{z-1} + z\big) - z\Big) = \frac{\sqrt{z-1}}{x}.$$

Diese DGL wird mit Hilfe von Trennung der Variablen gelöst:

$$
\begin{aligned}
z' = \frac{\sqrt{z-1}}{x} \quad & \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{z-1}}{x} \\
& \Longrightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \frac{dx}{x} \\
& \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \int \frac{dx}{x} \\
& \Longrightarrow \quad 2\sqrt{z-1} = \ln|x| + c \\
& \Longrightarrow \quad z - 1 = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + c\right)^2 \\
& \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + c\right)^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Lösung für (3) als

$$y = xz = \frac{x}{4}\left(\ln|x| + c\right)^2 + x.$$

Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 2:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\Big). \tag{4}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$\text{Fall 1:} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{Fall 2:} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Zum Fall 1: Wir nehmen $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ an; falls $(\alpha,\beta) = (0,0)$, so liegt eine DGL der Form $y' = f(\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c})$ vo, siehe weiter unten (5).

Die Vektoren (a,b) und (α,β) sind linear abhängig, d.h. es exisiert ein $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$\lambda(\alpha,\beta) = (a,b).$$

D.h. es gilt:

$$ax+by = \lambda\alpha x + \lambda\beta y = \lambda(\alpha x+\beta y).$$

Wir machen nun folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} & \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} \\ = & \frac{\lambda\big(\alpha x+\beta y\big)+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} \\ = & \frac{\lambda\big(\alpha x+\beta y+\frac{c}{\lambda}\big)}{\alpha x+\beta y+\gamma} \\ = & \frac{\lambda\big(\alpha x+\beta y+\gamma-(\gamma-\frac{c}{\lambda})\big)}{\alpha x+\beta y+\gamma} \\ = & \lambda\cdot\Big(1-\frac{\gamma-\frac{c}{\lambda}}{\alpha x+\beta y+\gamma}\Big). \end{aligned}$$

Setze nun

$$g(t) := \lambda\cdot\Big(1-\frac{\gamma-\frac{c}{\lambda}}{t}\Big) \quad \text{und} \quad F(t) = (f\circ g)(t) = f\big(g(t)\big).$$

Somit kann man die Differentialgleichung 4 schreiben als

$$y' = f\big(g(\alpha x+\beta x+\gamma)\big) = F(\alpha x+\beta y+\gamma). \tag{5}$$

Falls $\beta = 0$, so hängt $F(\alpha x+\beta y+\gamma) = F(\alpha x+\gamma)$ nur von x und <u>nicht</u> von y ab; somit kann man die Lösung mittels Trennung der Variablen bestimmen.

Wir nehmen nun im Folgenden $\beta \neq 0$ an. Man substituiere

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Daraus folgt

$$z' = \alpha + \beta y', \quad \text{d.h. } y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}.$$

Einsetzen in (5) ergibt

$$\frac{z' - \alpha}{\beta} = F(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \beta F(z) + \alpha. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung ist möglicherweise einfacher zu lösen als die Ausgangsgleichung (4).

Beispiel: Man löse

$$y' = f\left(\frac{4x - 6y + 6}{2x - 3y + 2}\right) \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{(t-2)^2} + \frac{2}{3}.$$

Es gilt: $2 \cdot (2x - 3y) = 4x - 6y$, d.h. es liegt Fall 1 vor mit $\lambda = 2$, $c = 6$, $\gamma = 2, \beta = -3$. Man substituiere $z = 2x - 3y + 2$. Ferner ist

$$g(t) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2 - \frac{6}{2}}{t}\right) = 2 + \frac{2}{t}.$$

Also:

$$F(t) = f(g(t)) = \frac{1}{\left(2 + \frac{2}{t} - 2\right)^2} + \frac{2}{3} = \frac{t^2}{4} + \frac{2}{3}.$$

Eingesetzt in Formel (6) ergibt dies die neue DGL:

$$z' = \left(\frac{z^2}{4} + \frac{2}{3}\right)(-3) + 2 = -\frac{3}{4}z^2.$$

Mit Hilfe der Methoder der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{3}{4}z^2 \\ \Longrightarrow \quad \frac{dz}{z^2} &= -\frac{3}{4}dx \\ \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2} &= \int -\frac{3}{4}dx \\ \Longrightarrow \quad -\frac{1}{z} &= -\frac{3}{4}x + c_0 \\ \Longrightarrow \quad z &= \frac{1}{\frac{3}{4}x - c_0} = \frac{4}{3x + c_1}. \end{aligned}$$

Da $z = 2x - 3y + 2$, ergibt sich für die gesuchte Lösung y:

$$y = \frac{1}{3}(2x + 2 - z) = \frac{2}{3x} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x + c_2}.$$

Zum Fall 2: In diesem Fall ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ \alpha x + \beta y &= -\gamma \end{aligned}$$

eindeutig lösbar. Sei (x_0, y_0) die zugehörige, eindeutige Lösung. Man setze

$$\bar{x} := x - x_0, \quad \bar{y} := y - y_0.$$

Man macht folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} &= \frac{a(\bar{x} + x_0) + b(\bar{y} + y_0) + c}{\alpha(\bar{x} + x_0) + \beta(\bar{y} + y_0) + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + ax_0 + by_0 + c}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}} \\ &= \frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}. \end{aligned}$$

Da $\bar{y}' = (y - y_0)' = y'$, erhält man folgende neue DGL:

$$\bar{y}' = f\Big(\frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\Big). \tag{7}$$

Man substituiere

$$z = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad \text{d.h.} \quad \bar{y} = \bar{x}z.$$

Also:

$$z' = \frac{\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{z}{\bar{x}}.$$

Aufgelöst nach $\bar{y}'$ ergibt dies

$$\bar{y}' = z'\bar{x} + z.$$

Eingesetzt in (7) ergibt dies

$$z'\bar{x} + z = f\Big(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\Big),$$

bzw. aufgelöst nach z':

$$z' = \frac{1}{\bar{x}} f\Big(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\Big) - \frac{z}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}}\Big(f\Big(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\Big) - z\Big). \tag{8}$$

Die Differentialgleichung ist nun mit Hilfe von Trennung der Variablen zu lösen. Daraus erhält man die Lösung von (4) als

$$y = \bar{y} + y_0 = \bar{x}z + y_0 = (x - x_0)z + y_0.$$

Beispiel: Man löse

$$y' = f\Big(\frac{2x+y-1}{3x+y+1}\Big) \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{t-1}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 3x + y &= -1 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar mit der Lösung $(x_0, y_0) = (-2, 5)$. Die Differentialgleichung (8) wird also in diesem konkreten Beispiel zu

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{\bar{x}}\left(\frac{1}{\frac{2+z}{3+z} - 1} - z\right) = \frac{1}{\bar{x}}\left(\frac{3+z}{2+z-3-z} - z\right) = \frac{1}{\bar{x}}(-3-z-z) \\ &= -\frac{1}{\bar{x}}(3+2z). \end{aligned} \tag{9}$$

Mit Hilfe von Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\bar{x}}(3+2z) \\ \Longrightarrow\quad & \frac{dz}{3+2z} = -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \Longrightarrow\quad & \int \frac{dz}{3+2z} = \int -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{2}\ln|3+2z| = -\ln|\bar{x}| + c_0. \end{aligned}$$

Man beachte, daß $\frac{1}{2}\ln|3+2z| = \ln\sqrt{|3+2z|}$. Somit ergibt sich:

$$\sqrt{|3+2z|} = e^{-\ln|\bar{x}|+c_0} = \frac{1}{|\bar{x}|} \cdot c_1 \text{ mit } c_1 > 0.$$

Quadrieren ergibt

$$|3+2z| = \frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2$$

und daraus ergibt sich:

$$3 + 2z = \frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2 \quad \text{bzw.} \quad 3 + 2z = -\frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2$$

Aufgelöst nach z ergibt das die Lösungen von (9):

$$z = \frac{c_2}{2\bar{x}^2} - \frac{3}{2} \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Somit ist die Lösung für y gegeben durch

$$y = (x - x_0)z + y_0 = (x+2)\left(\frac{c_2}{2(x+2)^2} - \frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{c_2}{2(x+2)} - \frac{3}{2}(x+2) + 5.$$

5. LINEARE DGL 1. ORDNUNG

DGL : $y' = a_1(x)\, y + a_0(x)$

$a_1(x),\ a_0(x)$ stetig Funktionen auf I

Ist $a_0(x) = 0 \Rightarrow \boxed{y'(x) = a_1(x)\, y(x)}$ → homogene Lineare DGL 1. Ordnung

$\boxed{a_0(x) \neq 0}$ → inhomogene DGL. 1. Ordnung

1. Schritt : Homogene DGL

$a_0(x) = 0 \Rightarrow y' = a_1(x)\, y$

Lösung : durch Trennung d. V $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a_1(x)\, y \Rightarrow$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a_1(x)\, dx \Rightarrow \ln|y| = \int a_1(x)\, dx \Rightarrow$

$$\boxed{y_{hom}(x) = c \cdot e^{\int a_1(x)dx}}$$

$c \in \mathbb{R}$ Konstante

2. Schritt : Lösung der inhomogenen Gleichung

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist von der Form

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x),$$

wobei : $y_{hom}(x)$ = Lösung der hom Gleichung $y' = a_1(x)\, y$

$y_{sp}(x)$ = eine (beliebige) spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Wie bestimmt man eine spezielle Lösung?

Methode: Variation der Konstanten

$$\begin{cases} y(x) = c \cdot e^{A(x)} & \to \text{all. Lösung der hom Gleichung} \\ A(x) = \int a_1(x)\,dx \end{cases}$$

Ansatz: $\boxed{y_{sp}(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}}$

$c \to$ in die Hom. Lösung wird durch eine Fkt $c(x)$ ersetzt und in die DGL eingesetz

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'_{sp}(x) = a_1(x)\, y_{sp}(x) + a_0(x)} \Rightarrow$$

$$\left(c(x) \cdot e^{\int a_1(x)dx}\right)' = a_1(x)\, c(x)\, e^{\int a_1(x)dx} + a_0(x) \Rightarrow$$

$$c'(x)\, e^{\int a_1(x)\,dx} + \cancel{a_1(x)\, c(x)\, e^{\int a_1(x)}} = \cancel{a_1(x)\, c(x)\, e^{\int a_1(x)dx}} + a_0(x) \Big/ \cdot e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = a_0(x)\, e^{-\int a_1(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad c(x) = \int a_0(x)\, e^{-A(x)}\,dx + C_1$$

$$A(x) = \int a_1(x)\,dx$$

Und

$$\boxed{y_{sp}(x) = e^{A(x)} \int a_0(x)\, e^{-A(\xi)}\, d\xi}$$

Satz: Wenn $a_0(x)$, $a_1(x)$ stetige Fkt auf I und $x_0 \in I$, dann hat das (AWP): $\begin{cases} y' = a_1(x)\,y + a_0(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

die Lösung $$y(x) = \underbrace{y_0\, e^{A(x)}}_{y_{hom}} + \underbrace{e^{A(x)} \cdot \int_{x_0}^{x} a_0(t)\, e^{-A(t)}\, dt}_{y_{sp}}$$

wobei $A(x) = \int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt$

BSP: (AWP) $\begin{cases} y' = \overbrace{\frac{-1}{2x}}^{a_1(x)}\, y + \overbrace{\sqrt{x}\, \sin x}^{a_0(x)} \\ y(\pi) = 2\sqrt{\pi} \end{cases}$; $I: \{x > 0\}$

Hom. Lösung: $y' = \frac{-1}{2x}\, y \underset{T.DV}{\Rightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2x}\, y \Rightarrow$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{-1}{2x}\, dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2} \ln(x) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\ln x + c}}_{>0} \Rightarrow \boxed{y_{hom} = C \cdot x^{-\frac{1}{2}} = } \frac{C}{\sqrt{x}}$; $x > 0$

Sp. Lösung: Var. der Konstanten

$C \to c(x)$

$\boxed{y_{sp}(x) = c(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}$ in DGL einsetzen.

$y_{sp}'(x) = c'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot c(x) \Rightarrow$

$c'(x) \frac{1}{\sqrt{x}} - \cancel{\frac{1}{2x\sqrt{x}} c(x)} = \cancel{\frac{-1}{2x\sqrt{x}} c(x)} + \sqrt{x} \sin x$

$\Rightarrow \quad c'(x) = x \sin x \Rightarrow c(x) = \underbrace{\int x \sin x}_{PI} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{C(x) = \sin x - x \cos x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{sp}(x) = \left(\sin x - x\cos(x)\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y_{hom}(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} \end{cases} ; \quad y(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x)$$

AWP : $y(\pi) = 2\sqrt{\pi} \Rightarrow \quad y(\pi) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} + \pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \Rightarrow$

$$\boxed{c = \pi}$$

Lösung

$$\boxed{y(x) = (\sin x - x\cos x)\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{\sqrt{x}}}$$

6. BERNOULLI DGL

Bernoulli DGL : (*) $\boxed{y' = a(x)\, y + b(x)\, y^{\alpha}}$ $(\alpha \neq 0, 1)$

Substitution : $z(x) = y(x)^{1-\alpha} \Rightarrow$

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y(x)^{-\alpha} \cdot y'(x) \Rightarrow y'(x) = z'(x)\, y(x)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

Einsetzen in DGL (*)

$$z'(x) \cdot y(x)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = a(x)\cdot y + b(x)\, y^{\alpha} \quad \Big| : y^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad z'(x)\frac{1}{1-\alpha} = a(x)\cdot \underbrace{y^{1-\alpha}}_{z(x)} + b(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{z'(x) = (1-\alpha)\, a(x)\, z(x) + (1-\alpha)\, b(x)}$$

lineare DGL 1. Ordnung

Bsp: $x y' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0 \Rightarrow$

$$y' = \underbrace{\frac{4}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{x}_{b(x)} y^{1/2} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

Subst $\quad z(x) = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \Rightarrow z'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$

$$\Rightarrow y' = 2z' \cdot \sqrt{y}$$

Einsetzen: $\quad 2z' \cdot \sqrt{y} = \frac{4}{x} \cdot y + x \cdot \sqrt{y} \quad |:\sqrt{y}$

$$\Rightarrow 2z' = \frac{4}{x} \cdot \underbrace{\sqrt{y}}_{z} + x \Rightarrow \boxed{z' = \frac{2}{x} z + \frac{x}{2}}$$

Lineare DGL 1. Ordnung:

$$z' = \frac{2}{x} z + \frac{x}{2}$$

Hom. Gleichung: $\quad z' = \frac{2}{x} z \Rightarrow \int \frac{1}{z} dz = 2\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + c \Rightarrow z = e^{2\ln x + c} \Rightarrow \boxed{z = x^2 C}$$

Sp. Lösung: $\quad$ Var. der Konstanten

$$C \to C(x); \quad \boxed{z(x) = c(x)\, x^2} \longrightarrow \text{einsetzen}$$

$$c'(x) \cdot x^2 + \cancel{2x\,c(x)} = \cancel{\frac{2}{x} \cdot c(x)\, x^2} + \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow \boxed{c(x) = \frac{1}{2}\ln x}$$

$$\Rightarrow z(x) = cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln x = x^2\left(c + \frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$z = \sqrt{y} \Rightarrow z^2 = y \Rightarrow y(x) = x^4\left(c + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$$

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
5. Juni 2019

Exakte Differentialgleichungen:

Definition: Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0$$

heißt exakt, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ gibt mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt dann $F_x(x,y) = A(x,y)$ und $F_y(x,y) = B(x,y)$

In diesem Fall ist dann eine (implizite) **Lösung** gegeben durch

$$F\big(x, y(x)\big) = c.$$

Denn Ableiten auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial F\big(x,y(x)\big)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}_{=A(x,y)} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}_{=B(x,y)} \underbrace{\frac{\partial y(x)}{\partial x}}_{=y'(x)} = 0.$$

Ein Kriterium, wann eine DGL **exakt** ist, liefert folgende (hinreichende) **Integrabilitätsbedingung**:

$$A_y(x,y) = B_x(x,y).$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so handelt es sich um eine exakte DGL, denn:

$$F_{xy}(x,y) = A_y(x,y) = B_x(x,y) = F_{yx}(x,y)$$

D.h. die Ableitungsreihenfolge ist vertauschbar, und man kann durch zweimaliges Integrieren (zuerst nach x, dann nach y integrieren, oder umgekehrt) die Funktion F bestimmen.

Lösen einer exakten Differentialgleichung:

Es sei eine **exakte** Differentialgleichung gegeben:

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0$$

D.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ gibt mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist gegeben durch $F(x,y) = c$, wobei die Funktion $F(x,y)$ nun zu bestimmen ist. Zunächst:

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,dx = \int A(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{1}$$

wobei $\varphi(y)$ eine Funktion in Abhängigkeit von y ist, aber nicht von x abhängt. Man beachte, daß Terme in y durch Ableiten und nachfolgendes Integrieren "verschwinden", weshalb $\varphi(y)$ hinzugefügt werden muß. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx + \varphi(y)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx\Big) + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Aufgelöst nach $\varphi'(y)$ ergibt dies

$$\varphi'(y) = B(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx\Big).$$

Daraus können wir durch Integration nach y die Funktion $\varphi(y)$ berechnen. Eingesetzt in (1) erhalten wir daraus die gesuchte Funktion $F(x,y)$.

Beispiel: Siehe Tafel!

Bemerkung: Manchmal hängt es nur von der Formulierung der DGL ab, ob sie exakt ist oder nicht: siehe Beispiel im Skriptum auf Seite I-21.

Definition: Eine stetige Funktion $\mu(x,y)$ mit $\mu(x,y) \neq 0$ für alle (x,y) im Definitionsbereich heißt integrierender Faktor der DGL $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$, wenn die DGL

$$\mu(x,y)A(x,y) + \mu(x,y)B(x,y)y' = 0$$

exakt ist.

Frage: Wie findet man nun einen passenden integrierenden Faktor $\mu(x,y)$?

Die Integrabilitätsbedingung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)A(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)B(x,y)\big),$$

d.h.

$$\mu_y(x,y)\cdot A(x,y) + \mu(x,y)A_y(x,y) = \mu_x(x,y)\cdot B(x,y) + \mu(x,y)B_x(x,y),$$

bzw. umgeschrieben ergibt dies:

$$\mu(x,y)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = \mu_x(x,y)\cdot B(x,y) - \mu_y(x,y)\cdot A(x,y). \qquad (2)$$

Daraus kann man $\mu(x,y)$ bestimmen, falls $\mu(x,y)$ tatsächlich **nur** von x oder **nur** von y abhängt, d.h. falls entweder $\mu_x(x,y) = 0$ oder $\mu_y(x,y) = 0$ für alle (x,y):

1. Falls $\mu_x(x,y) = 0$: D.h. μ hängt nur von y ab, und wir schreiben nur $\mu(y)$. Eingesetzt in (2) liefert

$$\mu(y)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = -\mu_y(y)\cdot A(x,y),$$

   bzw. umgeschrieben

$$\mu_y(y) = \frac{B_x(x,y) - A_y(x,y)}{A(x,y)}\mu(y).$$

   Falls nun $\big(B_x(x,y) - A_y(x,y)\big)/A(x,y)$ ebenfalls **nur** von y abhängt, so hat man eine homogene DGL erster Ordnung und kann μ bestimmen als

$$\mu(x,y) = \mu(y) = e^{\int \frac{B_x(x,y) - A_y(x,y)}{A(x,y)}dy}.$$

2. Falls $\mu_y(x,y) = 0$: D.h. μ hängt nur von x ab, und wir schreiben nur $\mu(x)$. Eingesetzt in (2) liefert

$$\mu(x)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = \mu_x(x)\cdot B(x,y),$$

   bzw. umgeschrieben

$$\mu_x(x) = \frac{A_y(x,y) - B_x(x,y)}{B(x,y)}\mu(x)$$

   Falls nun $\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big)/B(x,y)$ ebenfalls **nur** von x abhängt, so hat man eine homogene DGL erster Ordnung und kann μ bestimmen als

$$\mu(x,y) = \mu(x) = e^{\int \frac{A_y(x,y) - B_x(x,y)}{B(x,y)}dy}.$$

7. RICATTI DGL

Allgemeine Form: $\boxed{y' = a(x)\, y + b(x)\, y^2 + c(x)}$,

- Die Lösungen lassen sich im Allgemeinen nicht explizit bestimmen!
- Kennt man eine spezielle Lösung $y_1(x)$, so sind die übrigen explizit berechenbar
- Werden in die LV nicht behandelt

8. EXAKTE DGL

→ im KV erklären ?

LINEARE DGL n-ter Ordnung

Def: Eine lineare DGL n-ter Ordnung hat die Form

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) \cdot y = b(x)}$$

Linear: da die Fkt y und ihre Ableitungen treten nur in 1-er Potenz auf.

Die Koeffizienten Fkt: $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ und die Störfkt: $b(x)$ sind stetige Fkt. auf $I \subseteq \mathbb{R}$.

$b(x) = 0 \Rightarrow \boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0}$

↓
homogene DGL n-ter Ordnung

$b(x) \neq 0 \Rightarrow$ inhomogen

Satz: Für jedes $x_0 \in I$ und Startwerte $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat das (AWP)

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = b(x) \\ y(x_0) = w_0,\ y'(x_0) = w_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = w_{n-1} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung auf I.

Wie bestimmt man die Lösung?

1. Schritt: homogene Lösung $(b(x) = 0)$
2. Schritt: Lösung der inhomogenen Gleichung.

1. Schritt | HOMOGENE GLEICHUNG

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0} \qquad (A)$$

Die allgemeine Lösung von (A) ist ein n-dimensionaler linearer Vektorraum (von Funktionen)

- linearer heißt (a) die Summe 2er Lösungen / (b) das Vielfache einer Lösung > wieder eine Lösung ist.

- Jeder Vektorraum hat eine Basis (n-Vektoren von n- unabhängige Vektoren (FKt in unser Fall))

Def: Die Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ von DGL (A) heißen unabhängig, falls gilt:

$$\forall x \in I: \; C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

Def: n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ von (A) heißen Fundamentalsystem von DGL (A). $(y_1(x), \dots, y_n(x) \rightarrow$ Basislösungen$)$

! Fundamentalsystem gegeben ist, dann hat jede Lösung von (A) die eindeutige Form

$$\boxed{y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \dots + C_n y_n(x)}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$

D.h $\{y_1(x) \dots, y_n(x)\} \rightarrow$ Erzeugender System für der Vektorraum der all. Lösungen.

Frage: Seien $y_1(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen von

(A) $$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x) = 0}$$

Wie überprüft man, ob diese Lösungen ein Fundamentalsystem bilden?

Dazu definieren wir die Wronski-Determinante

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_n \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Satz. Die Lösungen $y_1(x) \ldots, y_n(x)$ bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn $W(x) \neq 0$ für ein (oder äquivalent: für alle) $x \in I$.

Bsp: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $1 = y_3(x)$

$$W(x) := \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$W(x_1) = 2 \neq 0 \ \forall x$, also sind e^x, e^{-x}, linear unabhängig.

2. Schritt Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y^{(n)}(x) + y^{(n-1)}(x) \cdot a_{n-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + y(x) = b(x)}$$

! Frage Spezielle Lösung für ↑ $y_{sp}(x)$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x)$$

wobei $y_{hom}(x)$ = allgemeine Lösung der zugehörigen hom Gleichung

$y_{sp}(x)$ = eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)}_{y_{hom}(x)} + y_{sp}(x)$$

$y_1(x), \dots y_n(x) \rightarrow$ Fundamentalsystem

Spezielle Lösung bestimmen: Variation der Konstanten

$$y_{sp}(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \dots + c_n(x)\, y_n(x)$$

$c_1(x), \dots, c_n(x) = ?$ einsetzen in die ursprungliche DGL, und $c_1(x) \dots, c_n(x)$ ausrechnen.

- Hauptschwierigkeit beim Lösen linearen DGL:

→ die homogene DGL zu lösen.

→ hat man ein Fundamentalsystem für DGL $\Rightarrow y_{hom}$ ✓ und y_{sp} mit Variation der Konstanten.

! Zu folgenden homogenen DGL lässt sich (leicht) ein Fundamentalsystem angeben:

→ lineare DGL 1. Ordnung $(n=1)$

→ lineare DGL n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten : $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$

→ Alle Koeff. fkt von der Form $a_i(x) = a_i x^i$, $i = 1, \dots, n-1$

! Ansonsten versucht man es mit speziellen Ansätzen und Reduktionsverfahren.

Bsp: $(2x - x^2) y'' + (x^2 - 2) y' + 2(1-x) y = x^2 (2-x)^2 e^x \quad / : (2x - x^2)$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + \frac{x^2 - 2}{2x - x^2} y' + \frac{2(1-x)}{2x - x^2} y = x(2-x) e^x}$$

↓ lineare DGL 2. Ordnung mit

$$\begin{cases} a_1(x) = \dfrac{x^2-2}{2x - x^2} = \dfrac{x^2-2}{x(2-x)} \\ a_0(x) = \dfrac{2(1-x)}{x(2-x)} \\ b(x) = x(2-x) e^x \end{cases}$$

1. Schritt : Homogene Gleichung $\boxed{y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0}$

Fundamentalsystem : $y_1(x), y_2(x)$

→ $y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = x^2$: Fund system

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x^2 \\ e^x & 2x \end{vmatrix} = \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{(2x - x^2)}_{x(2-x) \neq 0} \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$y_{hom}(x) = c_1 e^x + c_2 x^2$$

2. Schritt: Spezielle Lösung

$$y_{sp}(x) = c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, x^2$$

$$y_{sp}'(x) = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + c_2'(x)\, x^2 + c_2(x)\, 2x$$

$$y_{sp}''(x) = c_1''(x) e^x + c_1'(x) e^x + c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + c_2''(x)\, x^2 + c_2'(x)\, 2x + c_2'(x) \cdot 2x + c_2(x) \cdot 2$$

$$= c_1''(x) e^x + 2e^x c_1'(x) + c_1(x) e^x + c_2''(x)\, x^2 + 4 \cdot x\, c_2'(x) + 2\, c_2(x)$$

in die inhomogene DGL einsetzen und Koeff Vergleich

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -x^2 & \Rightarrow \quad c_1(x) = \dfrac{-x^3}{3} \\ c_2'(x) = e^x & \Rightarrow \quad c_2(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_{sp}(x) = \frac{-x^3}{3} e^x + x^2 e^x$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 x^2 + \frac{-x^3}{3} e^x + x^2 e^x}$$