LINEARE DLG's n-ter ORDNUNG mit KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

! lassen sich einfach lösen

! Fehler kaum in eine Klausur !

Allgemeine Form:

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)} \quad (1)$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, und $b(x)$ stetige Fkt auf $I \subseteq \mathbb{R}$.

$b(x) = 0 \Rightarrow$ DGL $\to$ homogen

$b(x) \neq 0 \Rightarrow$ DGL $\to$ inhomogen.

Die allgemeine Lösung (Siehe Satz Seite 148)

$$\boxed{y(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x)}$$

wobei $y_{hom}(x)$ = Lösung der dazugehörigen homogene DGL

$y_{sp}(x)$ = eine spezielle Lösung [Mit variation der Konstanten oder Ansatzmethode]

1. Schritt: Die Homogene Lösung

D. Gleichung: $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = 0}$

Der Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$, $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$, $k = 1, \ldots, n$

in die DGL eingesetzt führt auf:

$$\underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right)}_{P(\lambda)} \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow P(\lambda) = 0$

Wenn $P(\lambda)=0$, dann ist $y(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung

Charakteristisches Polynom der DGL:

$$P(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0$$

$\rightarrow$ hat n - Nullstellen als Lösung von $\boxed{P(\lambda)=0}$

- Erinnerung: $y_{hom}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ mit
  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\} \longrightarrow$ Fundamentalsystem

- Wenn $P(\lambda)=0$ dann ist $e^{\lambda x}$ eine Lösung
- Wir brauchen n - Lösungen.

  jede Nullstelle von $P(\lambda) \longleftrightarrow$ eine Basislösung von DGL (1)

  $\downarrow$ Vielfachkeiten zu berücksichtigen.

$\rightarrow$ jede k-fache Lösung von $P(\lambda)$ liefert k Lösungen der DGL.

$\boxed{P(\lambda) = 0}$ $\Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ Nullstellen

Entweder (1) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \in \mathbb{R}$

alle reel, unterschiedlich : $\mu(\lambda_i) = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$

(2) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen reelen Nullstellen

mit Vielfachkeiten $\mu(\lambda_1) + \dots + \mu(\lambda_r) = n$

(3) Oder $\lambda_1, \dots, \lambda_r \rightarrow$ Verschidenen reelen Nullstellen

und $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_s, \bar{z}_s \rightarrow$ Komplexe Nullstellen

mit $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mu(\lambda_i) + 2 \sum_{i=1}^{s} \mu(z_i) = n}$

Zu Fall 1 : alle reel, unterschiedlich $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem (Basislösungen) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$

$$\boxed{y_{hom}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}}$$

Zu Fall 2 : $\lambda_i \rightarrow$ eine reele Nullstelle mit ($i = 1, \dots, r$)

Vielfachkeit $\mu(\lambda_i) = k_i \Rightarrow k_i$ Basislösungen

$$\underbrace{e^{\lambda_i x}, \; x e^{\lambda_i x}, \; x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k_i - 1} e^{\lambda_i x}}_{k_i \text{ Lösungen für Nullstelle } \lambda_i \text{ mit } \mu(\lambda_i) = k_i}$$

Zu Fall 3: Wenn $z = \alpha + i\beta$ ist Nullstelle von komplex $P(x)$, dann ist auch $\bar{z} = \alpha - i\beta$ Nullstelle mit $\mu(z) = \mu(\bar{z}) = k$.

Dann zu $z = \alpha + i\beta$, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ mit $\mu(z) = 1$ $\Rightarrow$ 2 Basislösungen $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

Da $\boxed{e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)}$

- Wenn $\mu(z) = k > 1$ $\Rightarrow$ zu

$$\left.\begin{array}{l} z = \alpha + i\beta \\ \bar{z} = \alpha - i\beta \\ \mu(z) = \mu(\bar{z}) = k > 1 \end{array}\right\}$$

Gesamt $2k$ Lösungen

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

und $e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

! Alle diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem

- $\Rightarrow$ hom. Gleichung gelöst.

Beispiele

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0$: char. Polynom

Nullstellen von $P(\lambda)$	Lösung der hom. Gleichung
• $1, -2, 3$ $\boxed{n=3}$	$c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$
• $0, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ $\boxed{n=3}$	$c_1 e^0 + c_2 e^{\sqrt{3}x} + c_3 e^{\sqrt{2}x}$
• $0, 0, 2, 2, 2$ $\boxed{n=5}$ $\mu(0)=2, \mu(2)=3$	$c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + c_5 x^2 e^{2x}$
• $1, 1, 2+3i, 2-3i$ $\boxed{n=4}$ $\mu(1)=2; \mu(2\pm 3i)=1$	$\{e^x, xe^x, e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x\}$ FS: $c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x}\cos 3x + c_4 e^{2x}\sin 3x$
• $0, 0, 0, \pm i, \pm i, \pm i$ $n=9; \mu(0)=3, \mu(\pm i)=3$ $i = 0 + 1\cdot i$ $-i = 0 - 1\cdot i$	FS: $\{e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x},$ $e^{0x}\cos x, e^{0x}\sin x,$ $xe^{0x}\cos x, xe^{0x}\sin x$ $x^2e^{0x}\cos x, x^2e^{0x}\sin x\}$

Bsp: DGL:

(1) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$\mu(\lambda) = 2$

FS: $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$

$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

---

(2) $y'''' - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda^2+1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \ ; \mu(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_{2,3} = \pm i \ \ \mu(\lambda_2) = \mu(\lambda_3) = 1 \ ; \end{cases}$

FS: $\{ e^x, \; xe^x, \; \cos x, \; \sin x \}$

$i = 0 + 1 \cdot i$; $\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x}$

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = b(x)$$

$\boxed{b(x) \neq 0}$ **Ansatzmethode**

Bemerkung: λ eine reele Nullstelle von $P(\lambda)$ mit Vielfachheit $\mu \geq 0$ ($\mu = 0$, wenn λ keine Nullstelle ist) und $p(x)$ ein Polynom: $\boxed{b(x) = p(x) e^{\lambda x}}$

dann Ansatz für spezielle Lösung

$$\boxed{y_{sp}(x) = x^{\mu} g(x) e^{\lambda x}}$$

wobei $g(x) \rightarrow$ Polynom mit Grad = grad $p(x)$ mit unbekannten Koeffizienten

- Durch einsetzen in DGL (1) (Seite 151) und Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem Koeff. ausrechnen $\Rightarrow$ Gesuchte Lösung ok

Resonanzfall: wenn λ in $b(x) = p(x) e^{\lambda x} \rightarrow$ Nullstelle von $P(\lambda)$

Keine Resonanz: wenn λ in $b(x)$ keine Nullstelle von $P(\lambda)$

Beispiele Ansatz y_{sp}

Störfunktion $b(x)$	Nullstellen $P(\lambda)$	Ansatz (sp. Lösung)
$b(x) = x^2+1 = (x^2+1)\cdot e^{0x}$ $\mu(0)=0$	$1, 2$ Keine Resonanz	$y_{sp}(x) = (Ax^2 + bx + C)\cdot e^{0x}$
$b(x) = x^2+1 = (x^2+1)\cdot e^{0x}$ $\mu(0) = 1$	$0, 1$	$y_{sp}(x) = \underbrace{x^{\mu(0)}}_{x}\cdot(Ax^2 + Bx + C)\cdot e^{0x}$ $= x(Ax^2 + Bx + C)$
$x^3\cdot e^x$ $\mu(1) = 2$	$1, 1, 2$	$y_{sp}(x) = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cdot e^x$

! Vorgangsweise für komplexe Nullstellen → hier kann man Sinus und Cosinus nicht trennen

Wenn $b(x) = (p_1(x)\cos\beta x + p_2(x)\sin(\beta x))\cdot e^{\alpha x}$

$p_1(x), p_2(x)$ → polynome

dann überprüfen wir ob $\lambda = \alpha \pm i\beta$ Nullstelle von $P(\lambda)$ ist. Ansatz für die spezielle Lösung

$$\boxed{y_{sp}(x) = x^{\mu(\alpha \pm i\beta)}\cdot(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin(\beta x))\cdot e^{\alpha x}}$$

wobei $q_1(x), q_2(x)$ - Polynome mit unbekannten Koeff.

und $\boxed{\text{Grad} = \max\{\text{grad } p_1(x), \text{grad } p_2(x)\}}$

→ Einsetzen in die DGL, Koeffvergleich und $y_{sp}(x)$ bestimmen.

Achtung: Auch wenn $b(x)$ nur Sinus oder Cosinus enthält, müssen im Ansatz beide Teile verwendet werden!

Störfunktion	Nullstellen $P(\lambda)$	Ansatz Sp. Lösung
$3x\, e^{2x} = 3x\, e^{2x} \cdot \cos(0x)$ $\lambda = 2 + i \cdot 0 = 2$	$2, 2, 2$ $\mu(2) = 3$	$y_{sp} = x^3 (Ax+B) \cdot e^{2x}$
$4 \sin 2x = 4 e^{0x} \sin 2x$ $\lambda = 0 \pm 2i$; $P_2(x) = 4$	$\pm 2i$, 2	$y_{sp} = x^{\mu(2i)} \cdot (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) \cdot e^{0x}$ $y_{sp}(x) = x(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$
$x^2 e^{2x} \cos 3x$ $\lambda = 2 \pm 3i$; $\mu(\lambda) = 0$	$1, 2, 2$	$y_{sp} = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \cos 3x\, e^{2x} + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \sin 3x\, e^{2x}$

Superposition: Ist die StörFkt Summe von Fkt, für die man spezielle Ansätze hat, ist der Ansatz die Summe der speziellen Ansätze. (bei den jeweiligen Ansatz, die Resonanz ist zu beachten!)

$$b(x) = b_1(x) + \dots + b_m(x)$$

- jedes b_k einem der vorherigen Typen entspricht (insbesondere sollten verschiedene $b_k(x)$ auch verschiedenen λ, bzw. $\alpha \pm i\beta$ entsprechen).
- Dann bestimmen wir für jedes k eine Lösung $y_{sp,k}(x)$.

$$y_{sp}(x) = y_{sp,1}(x) + y_{sp,2}(x) + \dots + y_{sp,m}(x)$$

Bsp (1) $b(x) = x + \sin x = \underbrace{x \cdot e^{0x}}_{\lambda = 0} + \underbrace{\sin x \cdot e^{0x}}_{\lambda = 0 \pm 1 \cdot i}$

$b_1(x) = x$;
$b_2(x) = \sin x \cdot e^{0x}$

$$\boxed{y'' + y = x + \sin x}$$

Angenommen $P(\lambda)$ hat Nullstellen $\underline{0,0}$, $\pm i$, $\pm i$

Dann $\begin{cases} y_{sp,1}(x) = x^{\mu(0)}(Ax+B)\cdot e^{0x} = x^2(Ax+B) \\ b_1(x) = \underline{x} \cdot e^{0x} \end{cases}$

$\begin{cases} b_2(x) = \underline{\sin x}\; e^{0x} \\ y_{sp,2}(x) = x^{\mu(\pm i)}\cdot(A\sin x + B\cos x)\cdot e^{0x} = \\ \quad = x^2(A\sin x + B\cos x) \end{cases}$

$$y_{sp} = y_{sp_1}(x) + y_{sp,2}(x)$$

Weitere Methoden um $y_{sp}(x)$ zu bestimmen

Variation der Konstanten:

Wenn $y_{hom}(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$

Ansatz: $y_{sp}(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$

Einsetzen und $c_1(x)$, $c_2(x)$ bestimmen.

Beispiele DGL

(1) AWP $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x \\ y(0) = 1,\; y'(0) = 2 \end{cases}$

Folie Seite 3

Bsp Prüfung: 2 Juli 2018

Folien zur Vorlesung "Mathematik B"

SS 2019

Dr. Ecaterina Sava-Huss

Zu linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei eine homogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffiezienten gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

wobei $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $P(\lambda)$ das zugehörige *charakteristische Polynom*, d.h.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Sei nun $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine echt-komplexe Nullstelle von $P(\lambda)$ mit Vielfachheit $\mu(\lambda_1) = k > 0$. Es sind also die Funktionen

$$\hat{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ \hat{y}_2(x) = x\, e^{\lambda_1 x}, \ldots, \hat{y}_k(x) = x^{k-1}\, e^{\lambda_1 x}$$

linear unabhängige *komplex-wertige* Lösungen der DGL.

Frage: Wie bekommt man daraus *reell-wertige* Lösungen?

Überlegung: Sei $y = y_R + iy_I$ eine komplex-wertige Lösung mit Realteil y_R und Imaginärteil y_I, d.h. y_R und y_I sind reellwertig. Es gilt:

$$y^{(k)} = y_R^{(k)} + iy_I^{(k)}.$$

Wir setzen y in die DGL ein:

$$\left(y_R^{(n)} + iy_I^{(n)}\right) + a_{n-1}\left(y_R^{(n-1)} + iy_I^{(n-1)}\right) + \ldots + a_1\left(y_R' + iy_I'\right) + a_0(y_R + iy_I) = 0$$

Umstellen und Trennen nach Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\underbrace{\left[y_R^{(n)} + a_{n-1}y_R^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_R' + a_0 y_R\right]}_{=0} + i\underbrace{\left[y_I^{(n)} + a_{n-1}y_I^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_I' + a_0 y_I\right]}_{=0} = 0.$$

D.h. y_R und y_I sind auch – nun reellwertige – Lösungen der DGL.

Es gilt:

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right).$$

Die Realteile der Lösungen $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k$ sind somit:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Die Imaginärteile der Lösungen $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k$ sind:

$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Somit wurden zur Nullstelle λ_1 insgesamt $2k$ linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_{2k}$ der DGL gefunden.

Bemerkung: Wenn $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist mit $\mu(\lambda_1) = k > 0$, dann ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ mit $\mu(\bar{\lambda}_1) = k$. Da aber

$$e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\big),$$

sind die Realteile der Lösungen zu $\bar{\lambda}_1$ identisch mit den Realteilen der Lösungen zu λ_1; die Imaginärteile der Lösungen zu $\bar{\lambda}_1$ sind bis auf negatives Vorzeichen auch identisch mit den Imaginärteilen der Lösungen zu λ_1.
Mit anderen Worten: Man muss nur die $2k$ Lösungen zu λ_1 bestimmen; die Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ muss nicht mehr weiter betrachtet werden!

Beispiele zu linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1. Aufgabe: Löse das folgende Anfangswertproblem:

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{mit } y(0) = 1, y'(0) = 2.}$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form $b(x) = x = xe^{0 \cdot x}$. Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(0)} e^{0 \cdot x}(A + Bx) = A + Bx.$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt $y'_{sp} = B$ und $y''_{sp} = 0$. Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$0 - 3B + 2(A + Bx) = x.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$x^0 : \ -3B + 2A = 0, \qquad x^1 : \ 2B = 1$$

Daraus ergibt sich $B = 1/2$ und $A = 3/4$. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

Zum Lösen des Anfangswertproblems leiten wir $y_{all}(x)$ einmal ab:

$$y'_{all}(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

Wir setzen in $y_{all}(x)$ und $y'_{all}(x)$ den Wert $x = 0$ ein und kommen auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= y_{all}(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{4} \\ 2 &= y'_{all}(0) = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte $C_1 = -1$ und $C_2 = 5/4$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = -e^x + \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

2. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x.}$$

Lösung: Wie im ersten Beispiel ist die vollständige Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(1)} e^x (A + Bx + Cx^2) = e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3).$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x (A + 2Bx + 3Cx^2), \\ y''_{sp}(x) &= e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x (A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x (2B + 6Cx). \end{aligned}$$

Einsetzen von $y_{sp}(x)$ in die DGL ergibt somit:

$$\begin{aligned} e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x (A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x (2B + 6Cx)& \\ -3\big(e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x (A + 2Bx + 3Cx^2)\big)& \\ +2e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) &= x^2 e^x. \end{aligned}$$

Es wird auf beiden Seiten der Gleichung durch e^x dividiert und dann ein Koeffizientenvergleich gemacht:

$$\begin{aligned} x^3 :& \quad 0 = C - 3C + 2C = 0 \\ x^2 :& \quad 1 = B + 6C - 3B - 9C + 2B = -3C \\ x^1 :& \quad 0 = A + 4B + 6C - 3A - 6B + 2A = 6C - 2B \\ x^0 :& \quad 0 = 2A + 2B - 3A = 2B - A \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist $A = -2$, $B = -1$, $C = -1/3$. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x \big(-2x - x^2 - \frac{1}{3} x^3\big).$$

3. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\boxed{y'' - 4y' + 13y = e^{-x}.}$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = \big(\lambda - (2+3i)\big)\big(\lambda - (2-3i)\big).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x).$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(-1)} e^{-x} A = Ae^{-x}.$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt $y'_{sp} = -Ae^{-x}$ und $y''_{sp} = Ae^{-x}$. Einsetzen von $y_{sp}(x)$ in die DGL ergibt somit:

$$Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 13Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Dividieren durch e^{-x} ergibt $A = 1/18$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{18}e^{-x}.$$

4. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\boxed{y'' - 4y' + 13y = \cos(3x)e^{2x}.}$$

Lösung: Wie im vorhergehenden Beispiel ist die Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x).$$

Die Störfunktion hat hier die Form

$$b(x) = \big(1 \cdot \cos(3x) + 0 \cdot \sin(3x)\big)e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_{sp}(x) &= x^{\mu(2+3i)}e^{2x}\big(A\cos(3x) + B\sin(3x)\big) \\ &= e^{2x}\big(Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)\big). \end{aligned}$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^{2x}\big(2Ax\cos(3x) + 2Bx\sin(3x) + A\cos(3x) \\ &\qquad -3Ax\sin(3x) + B\sin(3x) + 3Bx\cos(3x)\big), \\ y''_{sp}(x) &= -e^{2x}\big(5Ax\cos(3x) + 5Bx\sin(3x) - 4A\cos(3x) + 12Ax\sin(3x) \\ &\qquad -4B\sin(3x) - 12Bx\cos(3x) + 6A\sin(3x) - 6B\cos(3x)\big) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$-6e^{2x}\big(A\sin(3x) - B\cos(3x)\big) = \cos(3x)e^{2x},$$

bzw. $-6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) = \cos(3x)$. Koeffizientenvergleich liefert also $A = 0$ und $B = 1/6$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{6}e^{2x}x\sin(3x).$$

5. Aufgabe: Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}.}$$

Lösung: Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist gegeben durch (siehe oben):

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form $b(x) = xe^{0\cdot x} + e^{2x}$. Eine spezielle Lösung zur DGL $y'' - 3y' + 2y = x$ ist gegeben durch (siehe oben)

$$y_{sp,1}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$$

Wir suchen nun noch eine spezielle Lösung zur DGL $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$. Dazu verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp,2}(x) = x^{\mu(2)} e^{2x} A = Axe^{2x}.$$

Differenzieren von $y_{sp,2}$ ergibt:

$$y'_{sp,2} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \quad \text{und} \quad y''_{sp} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$e^{2x}(4A + 4Ax) - 3e^{2x}(A + 2Ax) + 2Axe^{2x} = e^{2x},$$

bzw. $A - 0 \cdot x = 1$, also $A = 1$. Somit ist eine spezielle Lösung von $y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}$ gegeben durch

$$y_{sp}(x) = y_{sp,1}(x) + y_{sp,2}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + xe^{2x}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + xe^{2x}.$$

Reduktion der Ordnung:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Ziel ist es, diese DGL in eine lineare DGL erster Ordnung umzuformen. Dazu nehmen wir an, daß wir eine Lösung $y_1(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ "erraten" haben. Wir setzen

$$y(x) = y_1(x) \cdot u(x).$$

Differenzieren ergibt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x), \\ y''(x) &= y_1''(x)u(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) \\ &= y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL $(*)$ ergibt:

$$y_1''(x)u(x)+2y_1'(x)u'(x)+y_1(x)u''(x)+a_1(x)\big(y_1'(x)u(x)+y_1(x)u'(x)\big)+a_0(x)y_1(x)u(x) = b(x),$$

bzw. umgeformt:

$$u(x)\underbrace{\big(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\big)}_{=0}+2y_1'(x)u'(x)+y_1(x)u''(x)+a_1(x)y_1(x)u'(x) = b(x).$$

Wir ersetzen nun $z(x) = u'(x)$ und erhalten somit eine neue DGL erster Ordnung:

$$z\big(2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)\big) + z'y_1(x) = b(x).$$

Diese kann man wie gewohnt lösen und durch Integration von $z(x)$ bestimmt man $u(x)$, und daraus $y(x) = y_1(x)u(x)$.

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$\boxed{y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^2 + 1.}$$

Lösung: Wir "erraten" eine Lösung $y_1(x) = x$ der homogenen DGL $y'' + y'/x - y/x^2 = 0$. Wir setzen $y(x) = x \cdot u(x)$ und $z(x) = u'(x)$ und erhalten die neue DGL:

$$z\big(2 \cdot 1 + \frac{1}{x} \cdot x\big) + z' \cdot x = x^2 + 1,$$

bzw. $z' = -3z/x + (x^2 + 1)/x$. Es ist

$$z_{hom}(x) = Ce^{\int -3/x\,dx} = \frac{C}{x^3}.$$

Die spezielle Lösung ergibt sich als

$$z_{sp} = \frac{1}{x^3} \cdot \left[\int \frac{x^2+1}{x} \cdot x^3\,dx\right] = \frac{1}{x^3} \cdot \left[\int x^4 + x^2\,dx\right] = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}.$$

Also:

$$z_{all}(x) = z_{hom}(x) + z_{sp} = \frac{C}{x^3} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}.$$

Daraus ergibt sich:

$$u(x) = \int z(x)\,dx = -\frac{C}{2x^2} + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{3}x.$$

Somit ist die gesuchte allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_1(x)u(x) = \frac{\hat{C}}{x} + \frac{1}{15}x^4 + \frac{1}{3}x^2.$$

Variation der Konstanten:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

wobei die vollständige Lösung der zugehörigen DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ gegeben sei durch

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

d.h. y_1, y_2 bilden ein Fundamentalsystem. Wir wollen nun eine spezielle Lösung zu $(*)$ bestimmen. Dazu ersetzen wir in y_{hom} die Konstanten C_1 und C_2 durch Funktionen $C_1(x)$ und $C_2(x)$. Wir verwenden den Ansatz

$$y_{sp}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \text{ mit } C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Differentation von $y_{sp}(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} y_{sp}'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \\ y_{sp}''(x) &= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt:

$$\begin{aligned} &C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ &\quad + a_1(x)\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) + a_0(x)\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = b(x), \end{aligned}$$

bzw. umgeformt

$$\begin{aligned} &C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \\ &+C_1(x)\underbrace{\big(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\big)}_{=0} \\ &+C_2(x)\underbrace{\big(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\big)}_{=0} = b(x). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = b(x)$ gelten muss. Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \quad C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = b(x).$$

Lösung dieses Gleichungsystems ist

$$C_1'(x) = \frac{-b(x)y_2(x)}{W(x)} \text{ und } C_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)},$$

wobei $W(x)$ die Wronski-Determinate zum Fundamentalsystem y_1, y_2 ist. Man beachte, daß $W(x) \neq 0$. Durch Integration von $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$ finden wir $C_1(x)$ und $C_2(x)$ und somit die spezielle Lösung $y_{sp}(x)$.

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$\boxed{(*) \quad y'' - 4y = \frac{1}{e^x + 1}}$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz mittels Variation der Konstanten $y_{sp}(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}$. Es gilt:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4.$$

Somit sind

$$C_1'(x) = \frac{1}{4}\frac{e^{-2x}}{e^x + 1}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{4}\frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Integration (mittels Substitution und Partialbruchzerlegung) von $C_1(x)$ und $C_2(x)$ ergibt

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}\ln(1 + e^x) - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{x}{4}, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}\ln(1 + e^x). \end{aligned}$$

Also ist

$$y_{sp}(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{2x}\ln(1 + e^x) - \frac{1}{8} + \frac{x}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\ln(1 + e^x).$$

Somit ist die allgemeine Lösung von $(*)$ gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x).$$

SYSTEME VON DGL 1. ORDNUNG

DGLS

- **DGLS** n. DGL 1. Ordnung

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

- $f_1, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$
- Gesucht $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

- **AWP** = DGLS + Anfangswerten
  $(x_0, w_1, \dots, w_n)$:
  $y_1(x_0) = w_1$
  $y_2(x_0) = w_2$ ... , $y_n(x_0) = w_n$

- **Vektorielle Schreibweise**: $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$; $F(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})} \; ; \; F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

- **Lipschitzbedingung**: $\|F(x, \vec{y}) - F(x, \vec{z})\| \leq L \cdot \|\vec{y} - \vec{z}\|$

- **Existenz und Eindeutigkeitssatz**: I-40.

  - Wenn $f_1, \dots, f_n$ in D stetig partiell nach $y_1, \dots, y_n$ diff'bar $\Rightarrow$ lokale Lipschitzbedingung.
  - Alle partiellen Ableitungen beschränkt $\Rightarrow$ globale Lipschitzbedingung.

LINEARE SYSTEME MIT KONST. KOEFF

Hom DGLS : $\vec{y}'(x) = A\,\vec{y}(x)$

Sei $\lambda \to$ Nullstelle von $P(\lambda)$ mit $\mu(\lambda) = \mu$ und $\nu(\lambda) = \nu$

Fall 1:

$\boxed{\mu(\lambda) = \nu(\lambda)}$

λ mit $\mu(\lambda)$ in $P(\lambda)$
$\quad \| $
$\nu(\lambda) \Rightarrow$ Eigenraum zu λ : $\nu = \mu$ unabhängige Vektoren $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(\mu)} = ?$

mit $A = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda)\vec{v} = 0$

- Eigenvektoren ausrechnen → Fertig (μ Freiheitsparameter) A hat Rang $n-\mu$

zu $\lambda \longrightarrow$ Lösungen

$$\boxed{e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}, \dots, e^{\lambda x}\vec{v}^{(\mu)}} \to \text{Vektoren.}$$

Fall 2

$\boxed{\mu(\lambda) > \nu(\lambda)}$ → Brauchen μ Lösungen.

- Da Eigenraum zu λ hat Dimension ν, aus der Gleichung $(A-\lambda)\vec{v} = \vec{0}$ bekommen wir nur ν ein. unabhängigen. Vektoren : $\vec{v}^{(1)} \dots, \vec{v}^{(\nu)}$

mit zugehörigen Lösungen

$$\boxed{e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}, e^{\lambda x}\vec{v}^{(2)}, \dots, e^{\lambda x}\vec{v}^{(\nu)}}$$

- Fehlen noch $\mu - \nu$ Lösungen,

Die fehlenden Lösungen $(\mu - \nu)$ erhält man durch den Ansatz

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

, mit $p_1, \dots, p_n$ Polynome mit Grad $\mu-\nu$ mit unbekannter Koeff.

Koef ausrechnen durch einsetzen in die Gleichung und Koeff vergleich.

Bemerkung: Bei Komplexem Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ rechnet man Komplex $\Leftrightarrow$ Real- und Imaginärteil einer Komplexen Lösung sind 2 reele Lösungen.

$$\boxed{e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin \beta x)}$$

Hom Gleichungs System

Fall 2a: $\mu = 2$, $\nu = 1$

$$\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}$$

$\vec{v}^{(2)}$: $(A - \lambda I)\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)}$

Ansatz $\vec{y}^{[2]} = x e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)} + e^{\lambda x}\vec{v}^{(2)}$

Fall 2b: $\mu = 3$, $\nu = 1$

$\vec{y}^{[2]}$ und $\vec{v}^{(2)}$ wie Fall 2a

$$(A - \lambda I)\vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)}$$

$$\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)} + x e^{\lambda x}\vec{v}^{(2)} + e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}$$

Beispiel 1

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 4$
  $= \lambda^2 - 6\lambda + 5 =$
  $= (\lambda - 1)(\lambda - 5)$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = 5$

$$\begin{cases} \mu(\lambda_1) = \nu(\lambda_1) = 1 \\ \mu(\lambda_2) = \nu(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

- Eigenvektor zu $\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\rightarrow \vec{v}^{(1)} = ?$ mit $A\vec{v}^{(1)} = 1 \cdot \vec{v}^{(1)} \Rightarrow$

$$(A - 1I)\vec{v}^{(1)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$2v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} = 0$; $v_1^{(1)} = t \Rightarrow v_2^{(1)} = -t$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{v}^{(1)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Wähle $t = 1$

$\Rightarrow$ 1. Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}^{(1)}$ $\Rightarrow$ 1. Lösung $e^{1 \cdot x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5$: $\vec{v}^{(2)} = ?$

$$(A - 5I)\vec{v}^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{(2)} \\ \vec{v}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{v}_1^{(2)} - 2\vec{v}_2^{(2)} = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}^{(2)} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,

Wähle $s = 1$ $\Rightarrow$ 2. Eigenvektor $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

2. Lösung $e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem: $\left\{ e^{1x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \vec{y}_{hom}(x) = c_1 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Beispiel 2}}$ $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)$: $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\lambda = 2, \text{ mit } \mu(\lambda) = 2}$ $\boxed{\nu(\lambda) = 2}$

Was ist $\nu(\lambda) = ?$

Eigenraum zu $\lambda = 2$: $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rang} = 0} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ 2 − 0 unabhängige Vekt

$\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$ − 2 unabh. Vekt in $\mathbb{R}^2$

$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem: $\left\{ e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung: $\vec{y}(x) = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Beispiel 3}}$ $\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \vec{y}$ (*)

- $P(\lambda) = \det|A - \lambda I| = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 9 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 =$

$= (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \;;\; \mu(\lambda_1) = 1 \;;\; \nu(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1 \;;\; \mu(\lambda_2) = 2 \;;\; \nu(\lambda_2) = ? \end{cases}$

(1 oder 2)

- Eigenvektor $\vec{v}^{(1)}$ zu $\boxed{\lambda_1 = -1}$: $(A + I)\cdot\vec{v}^{(1)} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{III}: -v_2^{(1)} = 0$

$\text{II} \quad v_1^{(1)} + 3v_3^{(1)} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)} = -3v_3^{(1)}$

$\text{I} \quad 3v_1^{(1)} + 9v_3^{(1)} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)} = -3v_3^{(1)}$

$v_3^{(1)} = t \Rightarrow v^{(1)} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Wähle $\boxed{t=1}$

$\Rightarrow$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = -1 : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Lösung: $\vec{y}^{[1]} = e^{-x}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\boxed{\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 1}$

$(A - I)\vec{v}^{(2)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{III}. \ -v_2^{(2)} - 2v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow v_2^{(2)} = -2v_3^{(2)}$

$\text{II} \quad v_1^{(2)} - v_2^{(2)} + 3v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow v_1^{(2)} + 2v_3^{(2)} + 3v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow$

$v_1^{(2)} = -5v_3^{(2)}$

$\text{I} \quad v_1^{(2)} + 2v_2^{(2)} + 9v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow -5v_3^{(2)} + 2\cdot(-2v_3^{(2)}) + 9v_3^{(2)} = 0$

$0 = 0$

1 Freiheitsparameter: $v_3^{(2)} = t \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} -5t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$

Wähle $\underline{t = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösung $\vec{y}^{[2]} = e^{1\cdot x}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Brauchen noch eine Lösung: $\vec{y}^{[3]}$.

$$\vec{y}^{[3]} = x e^{1x} \vec{v}^{(2)} + e^{1\cdot x} \vec{v}^{(3)} = x e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

mit $(A - 1\cdot I)\,\vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{III}: -v_2^{(3)} - 2v_3^{(3)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2^{(3)} = -2v_3^{(3)} - 1}$$

$$\text{II}: v_1^{(3)} - \left(-2v_3^{(3)} - 1\right) + 3v_3^{(3)} = -2 \Rightarrow v_1^{(3)} + 5v_3^{(3)} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1^{(3)} = -5v_3^{(3)} - 3}$$

$$\text{I} \quad \underbrace{\left(-5v_3^{(3)} - 3\right)}_{v_1^{(3)}} + 2\underbrace{\left(-2v_3^{(3)} - 1\right)}_{v_2^{(3)}} + 9v_3^{(3)} = -5 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

$$v_3^{(3)} = t \quad \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} -5t-3 \\ -2t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

$t = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Lösung } \vec{y}^{[3]} = x e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $\left\{ \vec{y}^{[1]} = e^{-x} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{y}^{[2]} = e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{y}^{[3]} = x e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung
$$\boxed{\vec{y}(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 x e^{x} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$