

# Beispiel 4

$$\vec{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \vec{y} \quad = 167 =$$

•  $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 10 =$   
 $= \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i \\ \mu(\lambda_{1,2}) = 1 \end{cases}$

• Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 2 + 3i$

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}^{(1)} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

(Zeilen sind linear abhängig)

$$\underline{I} (1-3i) \cdot v_1^{(1)} = 5 v_2^{(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^{(1)} = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) v_1^{(1)}$$

$$\underline{II} 2v_1^{(1)} - \frac{1}{5}(1+3i)(1-3i)v_1^{(1)} = 0 \Rightarrow 2v_1^{(1)} - \frac{10}{5}v_1^{(1)} = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1^{(1)} = t \\ v_2^{(1)} = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right)t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$$

Wähle  $\underline{t=5}$  :  $\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

Lösung:  $\vec{y}^{(1)} = e^{(2+3i)x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} = e^{2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

$$= e^{2x} \left( \cos 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cos 3x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + i \sin 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin 3x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= e^{2x} \left( \cos 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3x \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + i e^{2x} \left( \cos 3x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \sin 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

FS:  $\left\{ \underbrace{e^{2x} \left( \cos 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3x \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)}_{\text{Lösung 1}}, \underbrace{e^{2x} \left( \cos 3x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \sin 3x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{Lösung 2}} \right\}$

= 168 =

Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 2 - 3i$  :  $\vec{v}^{(2)} = \overline{\vec{v}^{(1)}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

$$e^{(2-3i)x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} = e^{2x} \left( \underbrace{\cos(-3x)}_{\cos(3x)} + i \underbrace{\sin(-3x)}_{-\sin(3x)} \right) \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= e^{2x} \left[ \cos(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cos(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - i \sin(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= e^{2x} \left[ \underbrace{\cos(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Re}} + i \underbrace{\left[ \cos(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \sin(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}_{\text{Im}} \right]$$

$\Rightarrow$  FS:  $\left\{ \begin{aligned} & e^{2x} \left[ \cos(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \\ & e^{2x} \left[ \cos(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \sin(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \right\}$

$$\vec{y}(x) = C_1 e^{2x} \left( \cos(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + C_2 e^{2x} \left( \cos(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sin(3x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

= 169 =

**Beispiel 5**

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

A = ...

$$P(\lambda) = \det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\mu(\lambda) = 3$   
 $\nu(\lambda) = ?$

Eigenvektor zu  $\lambda = 1$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{II } v_1^{(1)} = v_2^{(1)} \\ \text{I } v_1^{(1)} = -v_3^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  Rang 1 Wähle  $t=1 \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  1. Lösung:  $\vec{y}^{(1)} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Fehlen 2 Lösungen

$$\vec{y}^{(2)} = x e^{1 \cdot x} \vec{v}^{(1)} + e^{1 \cdot x} \vec{v}^{(2)}$$

$(A - 1 \cdot I) \vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit

$\begin{cases} \text{I } v_1^{(2)} = 1 - v_3^{(2)} \\ \text{II } v_2^{(2)} = v_3^{(2)} \end{cases} \Rightarrow$   
 $= 1 - v_3^{(2)} - 1$   
 $= -v_3^{(2)}$

$\text{III } -v_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 1 \Leftrightarrow -1 + v_3^{(2)} - v_3^{(2)} = -1$   
 $\boxed{v_3^{(2)} = t} : \boxed{v_1^{(2)} = 1-t} ; \boxed{v_2^{(2)} = -t} \Rightarrow$

$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ t \end{pmatrix} ;$  Wähle  $t=1 : v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Lösung:  $\vec{y}^{(2)} = x e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

= 170 =

! Fehlt noch 1 Lösung  $\vec{y}^{[3]}$ ; Ansatz für  $\vec{y}^{[3]}$ :

$$\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^x \vec{v}^{(1)} + x e^x \vec{v}^{(2)} + e^x \vec{v}^{(3)} \quad \text{mit}$$

$$(A-I) \vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I  $v_1^{(3)} + v_3^{(3)} = 0 \Rightarrow v_3^{(3)} = -t$   
II  $t - v_2^{(3)} = -1 \Rightarrow v_2^{(3)} = t+1$

$$\vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Wähle  $t=1 \Rightarrow$

$$\vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem  $\{ \vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \vec{y}^{[3]} \}$

Lösung des DGLS:

$$\vec{y}(x) = C_1 \vec{y}^{[1]} + C_2 \vec{y}^{[2]} + C_3 \vec{y}^{[3]} =$$

$$= C_1 e^x \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + C_2 x e^x \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$

$$C_3 x^2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 x e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 x^2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) \parallel$$



## 2. Spezielle Lösung der inhomogenen DGLS

$$\vec{y}'(x) = A \vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

### Ansatzmethode

$$\vec{b}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}$$

- Sei  $m = \text{Max Grad} \{ p_1(x), \dots, p_n(x) \}$   
und  $\mu = \mu(\lambda)$  : Alg Vielfachheit von  $\lambda$  in  $P(\lambda)$

- Dann 
$$\vec{y}_{Sp} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}$$

$q_1(x), \dots, q_n(x)$  : Polynome mit Grad  $m + \mu$  und unbekanntem Koeffizienten.

### Wenn:

$$\vec{b}(x) = e^{\alpha x} \left[ \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \cos \beta x + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \sin(\beta x) \right]$$

$$\vec{y}_{Sp} = e^{(\alpha + i\beta)x} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{Sp} = 2 \operatorname{Re} \vec{y}_{Sp}^*$$

$q_1(x), \dots, q_n(x)$  : Polynome mit unbekanntem Koeff und Grad  $m = \text{Max Grad} \{ p_1(x), \dots, p_n(x), q_1(x), \dots, q_n(x) \}$   
 $m + \mu(\alpha + i\beta)$

$$= 172 =$$

# Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{y} = A\vec{y} + \vec{b}(x)$$

! Variation der Konstanten → machbar, aber aufwendig

! Ansatzmethode → effizienter

**Beispiel 1\*** → Beispiel 1) → Seite 4) mit  $b(x) \neq \vec{0}$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \vec{b}(x)$$

$$P(\lambda) : \begin{cases} \lambda_1 = 1 & ; \mu(1) = 1 \\ \lambda_2 = 5 & ; \mu(5) = 1 \end{cases}$$

**A**  $\vec{b}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$p_1(x) = 1$ , grad = 0  
 $p_2(x) = x$ , grad = 1  
2 ist keine Nullstelle von  $P(\lambda) \Rightarrow \mu(2) = 0$

max grad = 1 = m }  $m + \mu(2) = 1$

Ansatz:  $\vec{y}_{sp}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$ ; a, b, c, d = ?

Einsetzen und Koeffvergleich:

$$\vec{y}'_{sp}(x) = 2e^{2x} \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 2ax+2b+a \\ 2cx+2d+c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{2x} \begin{pmatrix} 2ax+2b+a \\ 2cx+2d+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ax+2b+a = 3ax+3b+2cx+2d+1 \\ 2cx+2d+c = 2ax+2b+3cx+3d+x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3a+2c \Rightarrow a = -2c \\ 2b+a = 3b+2d+1 \Rightarrow -b+a = 2d+1 \Rightarrow b = 2d+1+\frac{2}{3} \\ 2c = 2a+3c+1 \Rightarrow -c = 2a+1 \Rightarrow -c = 2(-2c)+1 \Rightarrow 3c=1 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \\ 2d+c = 2b+3d \end{cases}$$

$$\textcircled{*} -b = 2d + \frac{5}{3} \Rightarrow b = -2d - \frac{5}{3} \quad = 174 =$$

$$\text{IV gl. } 2d + \frac{1}{3} = 2(-2d - \frac{5}{3}) + 3d \Rightarrow 2d + \frac{1}{3} = -4d - \frac{10}{3} + 3d \Rightarrow$$

$$3d = -\frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{d = -\frac{11}{9}}$$

$$b = \frac{22}{9} - \frac{5}{3} = \frac{22 - 15}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\boxed{a = -\frac{2}{3} ; b = \frac{7}{9} ; c = \frac{1}{3} ; d = -\frac{11}{9}}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{sp}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9} \\ \frac{7}{9}x - \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{B} \vec{b}(x) = e^{x} \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} ; \mu(1) = 1 \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ \mu + m = 2 \end{array} \right.$$

$$\vec{y}_{sp}(x) = e^x \begin{pmatrix} Ax^2 + Bx + c \\ Dx^2 + Ex + D \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{C} \vec{b}(x) = e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\vec{b}_1(x) = e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} ; \mu(5) = 1 \Rightarrow \vec{y}_{sp,1}(x) = e^{5x} \begin{pmatrix} ax^2 + bx + c \\ dx^2 + ex + e \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2(x) = e^x \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} ; \mu(1) = 1 \Rightarrow \vec{y}_{sp,2}(x) = e^x \begin{pmatrix} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{sp}(x) = \vec{y}_{sp,1}(x) + \vec{y}_{sp,2}(x)$$



# D Beispiel 1\*

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \end{pmatrix} = \\ &= e^{2x} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1(x)} + e^x \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2x \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2(x)} \end{aligned}$$

$\vec{b}_1(x)$ : Ist  $2 \pm i$  Nullstelle von  $P(\lambda)$   $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \mu = 1$

Nein  
 $\Rightarrow \vec{y}_{sp1,*} = e^{2+i} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{y}_{sp1} = 2 \operatorname{Re} \vec{y}_{sp1,*}$

$\vec{b}_2(x)$ : Ist  $1 \pm 2i$  Nullstelle von  $P(\lambda)$ : Nein  
 $\vec{y}_{sp2,*} = e^{1+2i} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{y}_{sp2} = 2 \operatorname{Re} \vec{y}_{sp2,*}$

$$\vec{y}_{sp} = 2 \operatorname{Re} \left( e^{2+i} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) + 2 \operatorname{Re} \left( e^{1+2i} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \right)$$

**Beispiel 6** Man löse folgendes Anfangswertproblem:

$$(*) \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^{2x} \cos(x) \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Mit Anfangswerte:  $y_1(0) = 1$ ;  $y_2(0) = 2$

$$(*) \Leftrightarrow \underbrace{\vec{y}'(x)}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x)}_{A} + \underbrace{e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}(x)}$$

I. Homogene Lösung

$$\vec{y}'(x) = A \vec{y}(x)$$

$$P(\lambda): \det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\begin{cases} \mu(\lambda_1) = \nu(\lambda_1) = 1 \\ \mu(\lambda_2) = \nu(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{cases}$$

Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 2 + i$

$$(A - (2+i)I) \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2^{(1)} = -i v_1^{(1)}$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ -it \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{t=1} \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Eine komplexe Lösung des DGLS  $\vec{y}' = A \vec{y}$  als

$$\vec{y}_1(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2x} (\cos x + i \sin x) \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + i e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$

$= \vec{y}_1(x) \qquad \qquad \qquad \vec{y}_2(x)$

- Aufspalten von  $\vec{y}'_1(x)$  nach Real und Imaginärteil liefert 2 reellwertigen Lösungen  $\vec{y}_1(x)$  und  $\vec{y}_2(x) \Rightarrow$  die vollständige Lösungen (reellwertig):

$$\vec{y}_{\text{hom}}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$

## II Spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2x} \left[ \cos x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= e^{(2+i)x} \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + e^{(2-i)x} \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \underbrace{e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1(x)} + \underbrace{e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2(x)} \end{aligned}$$

[  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = q_1(x) = 0$ ,  $m = \max\{\text{grad}(p_i), \text{grad}(q_i)\} = 0$  ]

Spezielle Lösung zu  $\vec{b}_1(x)$  (Komplexwertig)

Zu System  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$

Ansatz:

$$\vec{y}_{\text{sp},1}(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix}$$

$$\mu(2+i) = 1$$

$\text{grad} = m + \mu(2+i) = 1$

• Komponenteweise Differentiation von  $\vec{y}_{\text{sp},1}(x) \Rightarrow$

$$\vec{y}'_{\text{sp},1}(x) = (2+i) e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix} + e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

- Einsetzen in DGLS und Koeff. Vergleich  $\Rightarrow$

oder direkt zum Ansatz

$$\begin{cases} (2+i)e^{(2+i)x}(Ax+B) + e^{(2+i)x}A = 2e^{(2+i)x}(Ax+B) - e^{(2+i)x}(Cx+D) \\ + \frac{1}{2}e^{(2+i)x} \\ (2+i)e^{(2+i)x}(Cx+D) + e^{(2+i)x}C = e^{(2+i)x}(Ax+B) + 2e^{(2+i)x}(Cx+D) \end{cases}$$

Kürzen durch  $e^{(2+i)x}$  und sortieren nach Potenzen von  $x \Rightarrow$

$$\begin{cases} (2+i)Ax + (2+i)B + A = (2A-C)x + (2B-D + \frac{1}{2}) \\ (2+i)Cx + (2+i)D + C = (A+2C)x + (B+2D) \end{cases}$$

Koeffizientenvergleich  $\Rightarrow$

$$1. \begin{cases} (2+i)A = 2A - C \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (2+i)B + A = 2B - D + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (2+i)C = A + 2C \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (2+i)D + C = B + 2D \Rightarrow B = iD + C \end{cases}$$

$$2. \text{ Gl } \Rightarrow A = -D + \frac{1}{2} - iB = -\cancel{D} + \frac{1}{2} + \cancel{D} - iC = \frac{1}{2} - iC$$

$$1. \text{ Gl } \Rightarrow C = -iA = -\frac{i}{2} - C \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} C = -\frac{i}{4} \\ A = \frac{1}{4} \end{matrix}}$$

$$2. \text{ Gl } \Leftrightarrow iB = -D + \frac{1}{4} \hat{=} \Rightarrow D \rightarrow \text{frei wählbar}$$

$$4. \text{ Gl } \Leftrightarrow iD - \frac{i}{4} = B$$

$$\text{z.B. } D=0 \text{ und } B = -\frac{i}{4} \Rightarrow$$

$$\vec{y}_{\text{sp1}}(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x - \frac{i}{4} \\ -\frac{i}{4}x \end{pmatrix}$$

= 179 =

Realteil von  $\vec{y}_{Sp,1}(x)$  ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\vec{y}_{Sp,1}(x)) &= \operatorname{Re} \left[ e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x + \frac{ix}{4} \sin x \\ -\frac{i}{4} x \cos x + \frac{x}{4} \sin x \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x \\ \frac{x}{4} \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{y}_{Sp,2}(x) = \overline{\vec{y}_{Sp,1}(x)}$$

$$\vec{y}_{Sp}(x) = 2 \operatorname{Re}(\vec{y}_{Sp,1}(x)) = 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x \\ \frac{x}{4} \sin x \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung: des DGLS:  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$  ist

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x \\ \frac{x}{4} \sin x \end{pmatrix}$$

AWP:  $y_1(0) = 1; y_2(0) = 2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2(-1) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} - 2e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x \\ \frac{x}{4} \sin x \end{pmatrix}$$



# Beispiel 7

$$\text{AWP: } \begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{2x} \begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad ; \quad \vec{y}(x) = ?$$

## I: Homogene Lösung:

$$P(\lambda) : \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 = 3 \quad ; \quad \lambda_1 = -1 \\ \mu(\lambda_2) = \mu(\lambda_1) = 1$$

Eigenvektor zu  $\lambda_1 = -1$

$$(A + I) \vec{v}^{(1)} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(1)} = 2v_2^{(1)} \\ v^{(1)} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad t=1 : \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 3$

$$: \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I) \vec{v}^{(2)} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(2)} = -2v_2^{(2)} \Rightarrow v^{(2)} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underline{t=1} : \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fund. system} \left\{ e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{3x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{y}_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## II Spezielle Lösung

$$\vec{b}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m = \max \left\{ \underbrace{\text{grad}(x+1)}_1, \underbrace{\text{grad}(3)}_0 \right\} = 1 ; \mu(2) = 0$$

$$\vec{y}_{sp}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} = 181 =$$

Einsetzen und Koeff.vergleich:

$$\vec{y}'_{sp}(x) = 2e^{2x} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} 2Ax + (2B+A) \\ 2Cx + (2D+C) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'_{sp}(x) = A \vec{y}_{sp}(x) + e^{2x} \begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2Ax + (2B+A) = (Ax+B) + 4(Cx+D) + (x+1) \\ 2Cx + (2D+C) = -(Ax+B) + Cx+D + 3 \end{cases}$$

=> Koeff.vergleich:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{cases} 2B+A = B-4D+1 \\ 2D+C = -B+D+3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \begin{cases} 2A = A-4C+1 \\ 2C = C-A \end{cases}$$

$$\text{IV} : C = -A$$

$$\text{II} : A = -4C + 1 \Rightarrow A = -4(-A) + 1 = -3A + 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{array}}$$

$$\text{I} : B - \frac{1}{3} = -4D + 1 \Rightarrow B = -4D + \frac{4}{3}$$

$$\text{III} : D + \frac{1}{3} = 4D - \frac{4}{3} + 3 \Rightarrow -3D = -\frac{5}{3} + 3 \Rightarrow$$

$$-3D = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{D = -\frac{4}{9}} \Rightarrow B = \frac{16}{9} + \frac{12}{9} = \frac{28}{9}$$

$$\boxed{B = \frac{28}{9}}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{sp}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{28}{9} \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{28}{9} \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$