Zü (ii) $f(x) = y \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{y}$

$f'(x)\,dx = dy$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int y^{-1/2}\,dy = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y} + C$$

$$= 2\sqrt{f(x)} + C$$

INTEGRATION RATIONALER FUNKTIONEN

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

- Häufig bekommt man durch Substitutionen rationale Fkt, diese lassen sich elementar lösen, durch geeignete Umformungen auf bekannte Integrale (Partialbruchzerlegung). Diese Umformungen können aber zeitraubend sein!

4 Typen von Brüchen $\qquad \int f(x)\,dx = ?$

TYP 1 $\quad f(x) = \dfrac{A}{x-\alpha}$; $\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A \cdot \ln|x-\alpha| + C$

denn $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A \int \frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)'}\,dx = A \cdot \ln|x-\alpha| + C$

TYP 2 $\quad f(x) = \dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, $k \geq 2$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{-A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C$$

Subs: $x - \alpha = y$; $dx = dy$

$$A \int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = A \int y^{-k}\,dy = A\,\frac{y^{-k+1}}{-k+1} + C = \ldots$$

$$= \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{y^{-1+k}} + c = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C$$

TYP 3

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \ln(x^2+\beta x+\gamma) \cdot \frac{B}{2} + \frac{2C-\beta \cdot B}{2\alpha} \arctan \frac{2x+\beta}{2\alpha} + C$$

mit $\alpha = \gamma - \frac{\beta}{2}$

$$\frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma} = \frac{B}{2} \cdot \frac{\overbrace{(x^2+\beta x+\gamma)'}^{2x+\beta}}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{2C-B\beta}{2} \cdot \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}$$

$$Bx+C = \underset{s}{(*)} \cdot \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)'}_{2x+\beta} + \underset{t}{(**)}$$

$$Bx+C = 2sx + s\beta + t \Rightarrow \quad s = \frac{B}{2}$$

$s, t = ?$

$$s\beta + t = C \Rightarrow \frac{B}{2} \cdot \beta + t = C \Rightarrow$$

$$t = C - \frac{B \cdot \beta}{2} = \frac{2C - B\beta}{2}$$

$$\Rightarrow Bx+C = \frac{B}{2}(x^2+\beta x+\gamma)' + (2C-\beta \cdot \beta)$$

$$\Rightarrow \int \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{B}{2} \int \frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx + \frac{2C-B\cdot\beta}{2} \cdot$$

$$\cdot \int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{B}{2} \ln|x^2+\beta x+\gamma| + C +$$

$$\frac{2C-\beta B}{2} \int \frac{1}{\alpha^2\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\right)^2+1\right)}\,dx =$$

$$x^2+\beta x+\gamma = x^2 + 2\cdot\frac{\beta}{2}\cdot x + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right)}_{\alpha^2}$$

Quadratische Ergänzung $= \alpha^2\left[\left(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\right)^2 + 1\right]$

$$I = \int \frac{1}{\alpha^2\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\right)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{\alpha}\arctan y + C$$

$$y = \frac{x+\beta/2}{\alpha} \Rightarrow dy = \frac{1}{\alpha}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{2x+\beta}{2\alpha} + C$$

$\boxed{\text{TYP 4}}$ $f(x) = \dfrac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \frac{B}{2}\cdot\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + \frac{2C-B\cdot\beta}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}}_{\text{Rekursiv}}$$

$$\int \frac{2x+\beta}{x^2+\beta x}\,dx = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + C$$

Siehe Skript Seite F-30

ERINNERUNG MATH A

RATIONALE FUNKTIONEN

Gebrochen rationale Fkt (oder kurz rationale Fkt) = ein Quotient zweier Polynome $p(x)$, $q(x)$ [$q(x) \neq$ Nullpolynom]

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- $r(x)$
  - echt gebrochen, wenn $\text{grad}(p(x)) < \text{grad}(q(x))$
  - unecht gebrochen, $\text{grad}(p(x)) \geq \text{grad}(q(x))$

- Echt gebrochene rationale Fkt : für Integralrechnung wichtig.

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

(1) Durchdividieren: wenn die rationale Fkt. nicht echt gebrochen ist.

(2) Nenner zerlegen: reele Produktdarstellung des Nenners bestimmen.

(3) Ansatz der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten.

(4) Koeffizientenbestimmung [Koeff.vergleich, Einsetzmethode]

- Jede echt gebrochene rationale Fkt lässt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben.

→ Zu jeder Potenz $(x-x_0)^k$ eines Linearfaktors im Nenner sind k Partialbrüche der Form

$$\frac{c_1}{x-x_0}, \frac{c_2}{(x-x_0)^2}, \dots, \frac{c_k}{(x-x_0)^k}$$ mit unbestimmten Koeff. anzusetzen

→ Zu jeder Potenz $(x^2+px+q)^k$ eines quadratischen Faktors ohne reele Nullstellen sind k Partialbrüche der Form

$$\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}, \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{a_kx+b_k}{(x^2+px+q)^k}$$

anzusetzen.

→ Alle Partialbrüche sind zu addieren.

Bsp (1) $$\frac{5x^4+18x^3+11x^2+12x+8}{x(x-1)^2(x+2)^3}$$

- $\underbrace{\text{grad (Zähler)}}_{=4} < \underbrace{\text{grad (Nenner)}}_{6}$ → keine Pol. division.

- Nenner schon zerlegt.

- Ansatz Partialbrüche

$$r(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2} + \frac{f}{(x+2)^3}$$

Bsp (2) $$\frac{x}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2}$$

BEISPIELE INTEGRALE RATIONALE FKT

Bsp 1: $$\boxed{\int \underbrace{\frac{x^3-2x^2+x+5}{x-1}}_{f(x)} dx} = \int (x-2)\,dx + \int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1} = (x-2) + \frac{2x+3}{x^2-1}$$

- Grad (zähler) > Grad (Nenner) => Pol. division

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+x+5 & x^2-1 \\ \hline -x^3 \quad\quad +x & x-2 \\ \hline \quad -2x^2+2x+5 & \\ \quad 2x^2 \quad\quad -2 & \\ \hline \quad\quad 2x+3 & \end{array}$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

- Koeff. => $2x+3 = a(x+1) + b(x-1)$

$\underline{x=1}$ $\Rightarrow 2+3 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

$\underline{x=-1}$ $\Rightarrow 1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Typ 1 Typ 1

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\int f(x)\,dx = \ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Bsp 2 $\boxed{\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)(x+1)^2}\,dx = ?}$

PBZ $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)(x+1)^2} = \underbrace{\frac{A}{x+1}}_{\text{Typ 1}} + \underbrace{\frac{B}{(x+1)^2}}_{\text{Typ 2}} + \underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+x+1}}_{\text{Typ 3}}$

Koeffvergleich $\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 = D \end{cases}$

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$

Typ 1: $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + C$

Typ 2: $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = \frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x+1} + C$

$x+1 = y \Rightarrow dx = dy$

Typ 3: $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx \overset{\text{Siehe unten}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\overbrace{\frac{4}{3}}^{\frac{2}{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,dx$ *

$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+x+1)' + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$

$\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\text{Quadratische Ergänzung}} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1^2\right]}$

$* : \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1 = y \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx = dy$

$* = \int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan y + C = \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$\Rightarrow \boxed{\int f(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C}$

RATIONALE FUNKTIONEN VON SINUS UND COSINUS

Erinnerung: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & ,\forall x \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \end{cases}$

Substitution: $\boxed{y = \tan\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan y \Rightarrow$

$x = 2\arctan y \Rightarrow \boxed{dx = 2\frac{1}{1+y^2}\,dy}$

Dann ist $\sin x = 2\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = 2\dfrac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\tan\frac{x}{2}}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)} =$

$= \dfrac{2y}{1+y^2} \Rightarrow \boxed{\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}}$

$\cos x = \dfrac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \Rightarrow \boxed{\cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}}$

Bsp: $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx} = ?$ $\qquad dx \;(=)$

$y = \tan\frac{x}{2}$; $\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}$

$dx = 2\frac{1}{1+y^2}dy$ $\qquad \cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

(=) .

$$\int \frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx = \int \frac{\frac{4y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{2y}{1+y^2}}{\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot 2\,\frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \int \frac{\frac{4y^2}{1+y^2} + 2y}{\frac{(1-y^2)^2}{1+y^2} + (1-y^2)} \cdot 2\,\frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \int \frac{4y^2 + 2y(1+y^2)}{(1-y^2)^2 + (1-y^2)(1+y^2)} \cdot 2\,\frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= 2\int \frac{4y^2 + 2y + 2y^3}{(1-y^2)(1-\cancel{y^2}+1+\cancel{y^2})(1+y^2)}\,dy = 2\int \frac{y^3+2y^2+y}{(1-y^2)(1+y^2)}\,dy$$

$$\frac{y^3+2y^2+y}{(1-y^2)(1+y^2)} \underset{\text{PBZ}}{=} \frac{Ay+B}{1+y^2} + \frac{C}{1-y} + \frac{D}{1+y}$$

$$\frac{y^3+2y^2+y}{(1-y)(1+y)(1+y^2)}$$

Koeff. vergleich: $\Rightarrow$ $A = 0$

$B = -1$

$D = 0$

$C = 1$

$$\Rightarrow I = 2\left[\int \frac{-1}{1+y^2}\,dy + \int \frac{1}{1-y}\,dy\right] = -2\arctan y - 2\ln|y-1| = -2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - 2\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| + C$$

$$= -2\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| - x + C$$

Bsp $\underbrace{\displaystyle\int \frac{2x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx}_{\text{TYP 4}}$

$$\frac{2x+4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

$$I_2 = 2\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy = 2\int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^2}\,dy -$$

Quadr. Erg.

$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1^2$

Substitution

$x+1 = y \Rightarrow dx = dy$

$$-2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy - 2\int y\,\frac{y}{(y^2+1)^2}\,dy =$$

$$= 2\arctan y - \Big[\int \underbrace{y}_{f} \cdot \underbrace{\frac{2y}{(y^2+1)^2}}_{g'}\Big] = 2\arctan(x+1) -$$

PI $f' = 1$

$$g' = \frac{2y}{(y^2+1)^2} \Rightarrow g = \int \frac{2y}{(y^2+1)^2}\,dy = \int \frac{(y^2+1)'}{(y^2+1)^2}\,dy =$$

$$= \frac{-1}{y^2+1}$$

$$+\frac{y}{y^2+1} - \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = 2\arctan(x+1) - \frac{x+1}{(x+1)^2+1} -$$

$$-\arctan(y) + C = \arctan(x+1) - \frac{x+1}{x^2+2x+2} + C = I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)\,dx = \frac{-x-2}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C}$$

F4. BOGENLÄNGE VON KURVEN

Def: Sei I ein Interval. Eine Vektorwertige Funktion

$\vec{x} : I \to \mathbb{R}^d$ mit,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

wobei alle x_i sind 1-dim. Fkt, heißt Parameterdarstellung einer Kurve $\vec{x}(t)$ im d-dimensionalen Raum.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{x} : I \to \mathbb{R}^d & \text{Kurve} \\ t & \text{Parameter} \\ I & \text{Parameterintervall} \end{array} \right.$$

- Mit wachsendem t, die Kurve läuft in positiver Richtung.

Wenn $I = [a,b]$ dann: $\left.\begin{array}{l} \vec{x}(a) \to \text{Anfangspunkt} \\ \vec{x}(b) \to \text{Endpunkt} \end{array}\right\}$ der Kurve

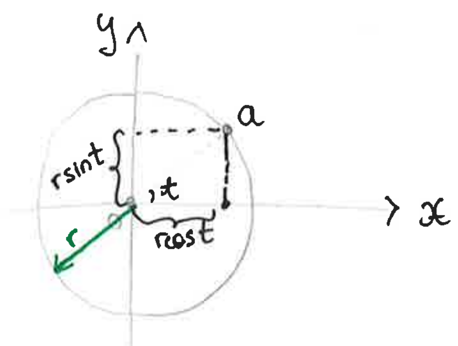
- Teilchenbahnen sind Beispiele für Kurven.

Beispiele:

(1) Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

t - Winkel



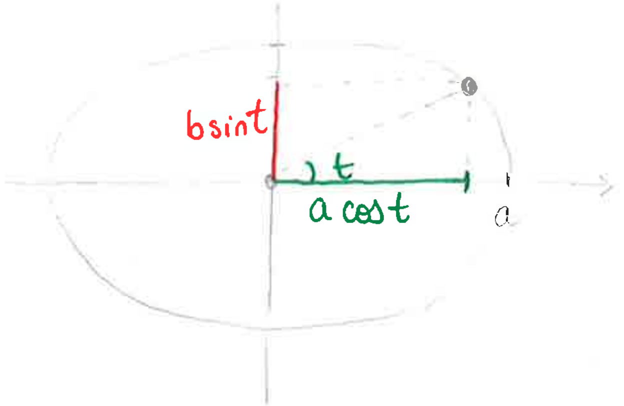
- $\vec{x}(t)$ stellt einen Kreis dar, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(2) <u>Ellipse</u> in $\mathbb{R}^2$: hat Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

- $\vec{x}(t)$ läuft im Gegenuhrzeigersinn

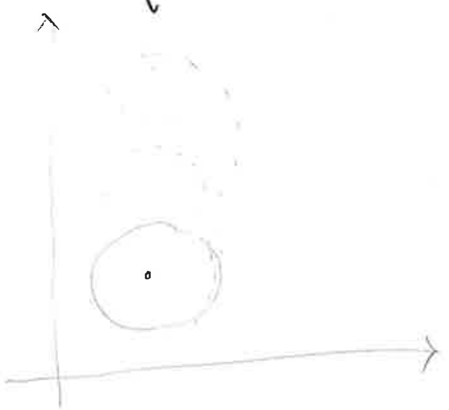
- t - Winkel



(3) <u>(Schraubenlinie) Schraubenbewegung</u> mit radius r nach oben ist eine 3-dim. Kurve mit Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

- Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der x-y Ebene und einer linearen Bewegung in z-Ebene mit der Ganghöhe $2h\pi$



- Eine Kurve besitzt mehrere Darstellungen (unendlich viele)
  - → Parameterdarstellung (vorher erwähnt)
  - → Implizite Darstellung (Parameter wird Eliminiert

Implizite Darstellung

- Parameter t wird eliminiert

Bsp (1) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2 \Rightarrow$

$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = r^2}$ $\rightarrow$ Implizite Darstellung

Bsp (2): Ellipse:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Bsp (3) Schraubenlinie

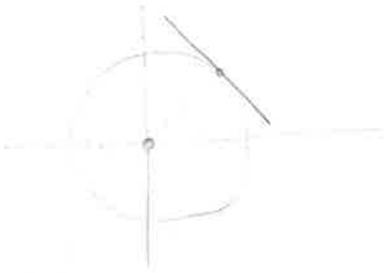
$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad , \quad x_3 \geq 0}$

- Wenn alle Fkt. $x_i(t)$, $i = 1, \dots, d$ sind diff'bar dann ist die Kurve auch diff'bar, mit Ableitungen

$\boxed{\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)}$

Tangentenvektor an die Kurve $x(t)$ im Punkt t_0

$$\vec{x}\,'(t_0) = \dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0) \end{pmatrix}$$



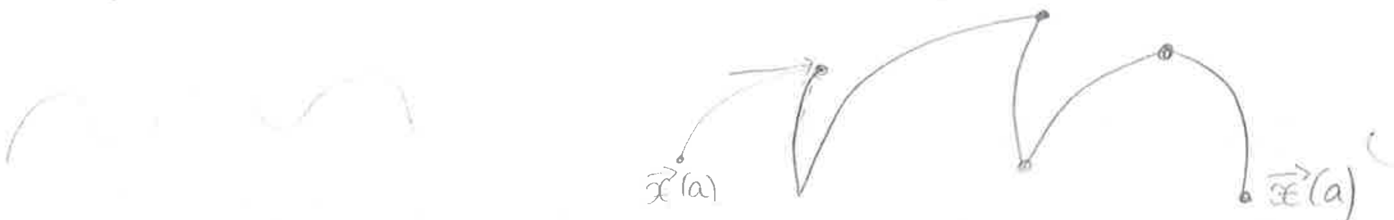
Bsp: (1) Kreis: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$

(2) Ellipse: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

(3) Schraubenbewegung: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$

- **Glatte Kurve**: $\vec{x}(t)$ heißt glatt wenn alle $x_i(t)$ diff.'bar sind und die Ableitungen sind stetig.

- **Stückweise glatte Kurve auf $[a,b]$**: $\vec{x}(t)$ ist stetig auf $[a,b]$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, in denen aber aber die links- und rechtseitigen Grenzwerte von $\vec{x}(t)$ existieren.

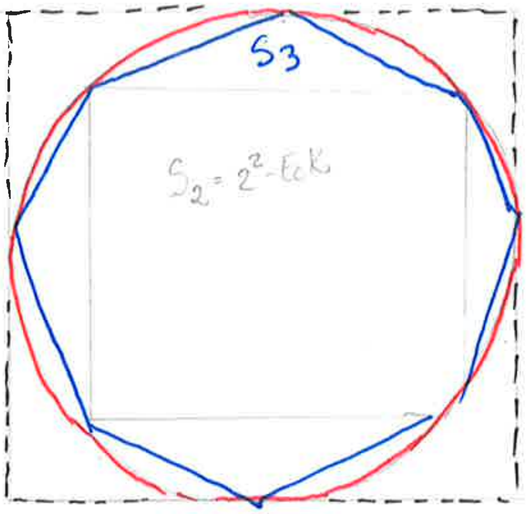


- glatte Kurve

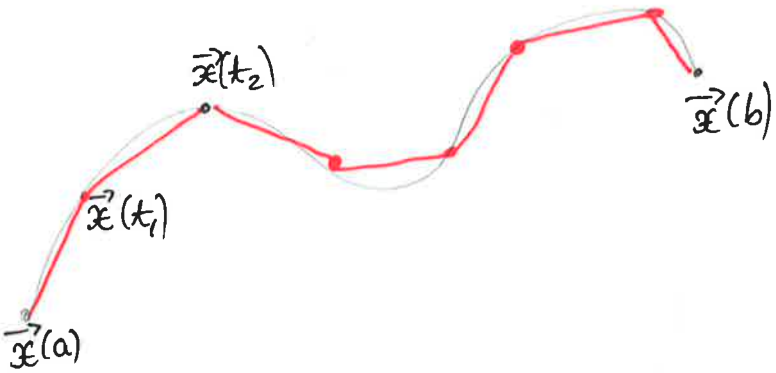
BOGENLÄNGE EINER KURVE

- wichtige Anwendung der Integralrechnung auf Kurven.

Motivierendes Beispiel: Approximiere Kreis durch eingeschriebene regelmäßige 2^n-Ecke $(n \geq 2)$. Ihre Umfänge S_n wachsen monoton in n und sind z.B durch den Umfang eines umbeschriebenen Quadrats nach oben beschränkt. Somit existiert $\sup_n (S_n) \to$ definiert den Kreisumfang.



Allgemein für Kurve $\vec{x}(t)$:



Für Kurve $\vec{x}(t)$: annährung durch einen Polygonzug P für eine Zerlegung P des Intervals $[a, b]$

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b \}$$

ist seine Länge gegeben durch:

$$\boxed{L(P) = \|\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_0)\| + \|\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)\| + \dots + \|\vec{x}(t_r) - \vec{x}(t_{r-1})\|}$$

$\|\cdot\| \to$ Euklidische Norm eines Vektors.

- Für feinere Zerlegungen (d.h. $n \to \infty$) $\ell(P)$ wird die Länge der Kurve approxiemeren (wir wollen $\ell(P)$ durch Integral approx)

$$\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1}) = \begin{pmatrix} x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}) \\ \vdots \\ x_d(t_i) - x_d(t_{i-1}) \end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots, r$

und

$$\boxed{\|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\right)^2}}$$

Erinnerung:

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$f: [a, b]$ stetig, und in (a, b) diff'bar $\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a)$

Anwenden mws für Funktionen x_j im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$:
(x_j ist stetig auf $[t_{i-1}, t_i]$ und diff.'bar auf (t_{i-1}, t_i))

$\Rightarrow \exists \quad \tau_j \in (t_{i-1}, t_i)$:

$$x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}) = x_j'(\tau_j)(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau_j)\right)^2}\,(t_i - t_{i-1})} \quad (*)$$

und

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{r} (t_i - t_{i-1}) \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau_j)\right)^2}}$$

$$f(t) = \|\vec{x}'(t)\| = \|\dot{\vec{x}}(t)\|$$

M.W.S der Integralrechnung
für $f(t)$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a,b]$

Für $f(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}$ auf $[t_{i-1}, t_i]$;

$\exists\ \tau \in (t_{i-1}, t_i)$:

$$(**) \quad \boxed{\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,d(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau)\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1})}$$

Im Grenzwert, wenn die Zerlegung P immer feiner wird, wird $(*)$ und $(**)$ $\to$ sehr nah beinander und man kann die Länge der Kurve so definieren:

$$\boxed{L = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \ldots + \dot{x}_d(t)^2}\,dt}$$

Bsp : (1) Kreis : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$

(2) Ellipse $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$

(3) Schraubenlinie : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + h^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2}\, dt =$

$$= 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$$

Parameterwechsel Kurven : → weg lassen

- Ist $\vec{x}(t)$ eine Kurve und $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Fkt (oder fallende), so stellt die "neue" Kurve $\vec{y}(\tau) := \vec{x}(g(\tau))$ dieselbe Kurve (als Punktmenge) dar.

- Parametrisierung durch Bogenlänge fkt. von Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [a,b]$

$$s(t) = \int_a^t \| \dot{\vec{x}}(u) \| \, du$$

$s(a) = 0$, $s(b) = L$ $\quad s : [a,b] \to [0,L]$

Umkehr fkt → $t(s) : [0,L] \to [a,b]$

Parameterwechsel $\boxed{\vec{y}(s) := \vec{x}(t(s))}$

Bsp: (1) Kreis $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ $\quad \cdot \in [0, 2\pi]$

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$ $\quad t(s) = \frac{s}{r} \quad \Rightarrow \vec{x}(t(s)) = \vec{x}\left(\frac{s}{r}\right)$

Bogenlänge $s(t) = \int_0^t r\, du = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r}$ und

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix} ; \quad 0 \le s \le 2\pi r$$

Bsp [Prüfung Mathe B, 5/12/2018]

Bogenlänge der Kurve

$$\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{6} t^2 , 3t , \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \right)$$

zwischen $A = \left(\frac{1}{6}, 3, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ und $B = \left(\frac{2}{3}, 6, \frac{8}{3} \right)$

$t = 1 \Rightarrow \quad \vec{x}(1) = A$

$t = 2 \Rightarrow \quad \vec{x}(2) = B$

$$L = \int_1^2 \| \dot{\vec{x}}(t) \| \, dt = \int_1^2 \sqrt{\left[\left(\frac{1}{6} t^2\right)'\right]^2 + \left[(3t)'\right]' + \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}\right)'\right]^2} \, dt =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2 + 9 + \sqrt{2t}^{\,2}} \, dt = \int_1^2 \sqrt{\frac{t^2}{9} + 9 + 2t} \, dt =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{(t+9)^2}{9}} \, dt = \frac{1}{3} \int_1^2 (t+9) \, dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^2}{2} + 9t \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}$$