F6. INTEGRAL UND FOLGEN VON FUNKTIONEN

Erinnerung: • Gleichmäßige Konv von (f_n) gegen f:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon : \exists\, n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

(n_ε ist unabhängig von x)

• Punktweise Konv von (f_n) gegen f:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \forall x, \exists\, n_\varepsilon(x) : \forall n \geq n_\varepsilon$

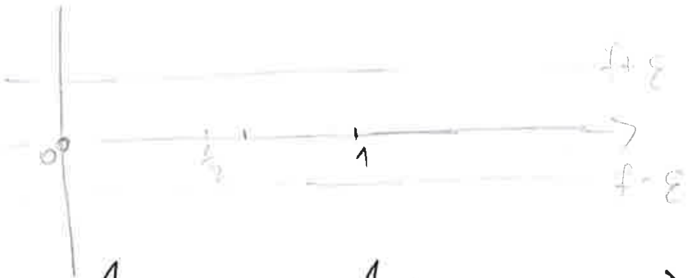
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

• Gleichmäßige Konv $\Rightarrow$ Punktweise Konv.

Bsp: 1) $f_n(x) = \dfrac{n}{n^2+x^2}$ Konvergiert gleichmäßig und Punktweise gegen 0

2) $f_n(x) = n^2(1-x)x^n \quad , x \in [0,1]$

Punkweise: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$



$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(n^2x^n - n^2x^{n+1}\right)dx = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) \neq \int_0^1 f(x)\,dx$, da $f_n \to f_n$ nichtgleichmäßig

Satz Ist $f_n(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar und konvergiert gleichmäßig gegen f, dann ist auch $f(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar und

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .}$$

F7 FOURIER-REIHEN

- Die Grundidee der Fourier-Reihe geht von der Annahme aus, dass die trigonometrischen FKt (sin, cos) eine sehr bedeutende Rolle für alle Periodischen FKt. spielen. Es handelt sich sozusagen um die Atome unter der Periodischen FKt, in dem Sinn, dass man so gut wie alle praktisch wichtigen per. FKt aus geignet skalierten Sinus- und Kosinusbausteinen "zusammensetzen" kann.

- Eine FKt. mit Hilfe einer Linearkombination darzustellen ist in der Mathematik nicht neu:

  → Taylorreihe : eine FKt wird in eine Potenzreihe entwickelt

  → Fourierreihe : verwendet Sin und Cos FKt.

  Anwendungen: → Beschreibung periodischer Vorgänge Astronomie
  → Wärmeleitungsgleichungen
  → Signalanalyse.

Def: Eine FKt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch $(T>0)$ wenn $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Üblichster Fall: 2π-periodisch. Wenn f Periode T hat, dann hat $g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ Periode 2π. Daher beschränken wir uns auf $T = 2\pi$.

"brave" FKt

- Um für eine konkrete 2π periodische FKt f die Fourierreihe

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)} \quad (*)$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, bilden zu können, müssen die Koeff a_i, b_i bestimmt werden, die Fourier Koeffizienten.

Hilfreich um a_i, b_i zu bestimmen sind

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi, & m = n \in \mathbb{N} \\ 2\pi, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \pi, & m = n \in \mathbb{N} \\ 0, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$$

Die kann man leicht beweisen mit Hilfe der Summenformel

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

Punkweise & Gleichmäßige Konv. von Reihen

Erinnerung: Die Reihe von Fkt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ heißt punktweise (bzw. gleichmäßig) Konv. gegen $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ wenn die Folge der Partialsummen

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

punktweise, bzw. gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Frage: Kann man jede "brave" Fkt f durch eine Fourierreihe $F(x)$ approxiemieren?

$$\boxed{f(x) \overset{!}{=} F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)} \quad (**)$$

Unter diese Annahme, wollen wir herausfinden wie die Fourier Koeff a_n, b_n zu bestimmen haben.

Multiplizieren (**) mit $\cos(m x)$ und Integration über $[-\pi, \pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\right)\cos(mx)\,dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\cos(mx)\right)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx +$$

$\boxed{\text{Wenn Reihe (**) gleichmäßig Konvergiert gegen } f \Rightarrow}$ darf man Σ und $\int$ tauschen $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int S_n = \int f}$

$\lim_{n} \int S_n = \int \lim S_n = \int f$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx}_{=\pi \text{ wenn } m=n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx}_{0}\right) =$$

$$= a_m \pi \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx} \qquad m = 0, 1, 2,$$

Multiplizieren (**) mit $\sin(mx)$ und integrieren über $[-\pi,\pi]$

$$\Rightarrow \boxed{b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx} \qquad m = 1, 2, \dots$$

Satz: Falls die Fourierreihe

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

gleichmäßig konvergiert, dann kann man f durch F approximieren und die Koeff. a_n, b_n kann man aus „f" so ausrechnen

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx, \quad m = 0, 1, 2$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Gerade und ungerade Funktionen

- f gerade $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$,
- f ungerade $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

1) f gerade $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(x)\sin(nx) \text{ ungerade} \\ f(x)\cos(nx) \text{ gerade} \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

2) f ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Satz: Sei f eine 2π-periodische Fkt mit folgenden Eigenschaften:

(i) In jedem endlichen Interval $[a,b]$ es gibt nur endlich viele Pkt x, wo f nicht stetig oder diff'bar. (Ausnahmen pkt)

(ii) In allen anderen Punkten, f' - stetig.

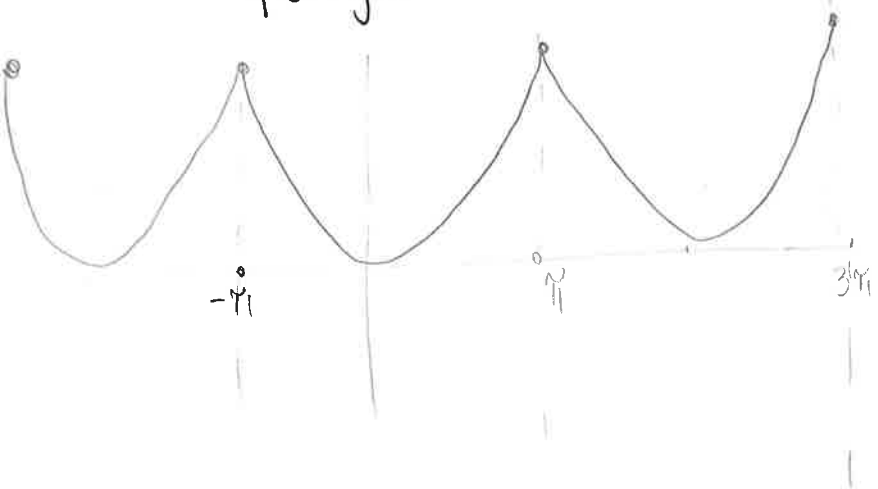
(iii) Auch in den Ausnahmen pkt von (i) existieren die links und rechtseitigen Grenzwerte $f(x-)$, $f(x+)$ und deren Ableitungen $f'(x-)$, $f'(x+)$.

- Dann konv punktweise die Fourierreihe F von f gegen die Fkt.

$$\boxed{\bar{f}(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}}$$

- Ist f überall stetig, dann konvergiert die Fourierreihe F von f gleichmäßig gegen f.

Bsp (1) Sei $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, mit Periode 2π fortgesetzt.



f ist überall stetig $\Rightarrow$ konvergiert gleichmäßig gegen Fourierreihe

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ f gerade und $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx \underset{P.I}{=} \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 (\sin nx)'\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\, x^2 \sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} 2x \sin(nx)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\,(-\cos(nx))'\,dx = \frac{+4}{\pi n^2}\, x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left(\pi\cos(\pi n) - 0\right) - \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} = \frac{4}{\pi^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi^2}} \quad \boxed{b_n = 0} \quad ; \quad \boxed{a_0 = \frac{2\pi^2}{3}}$$

$n \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe für $f(x)$ lautet

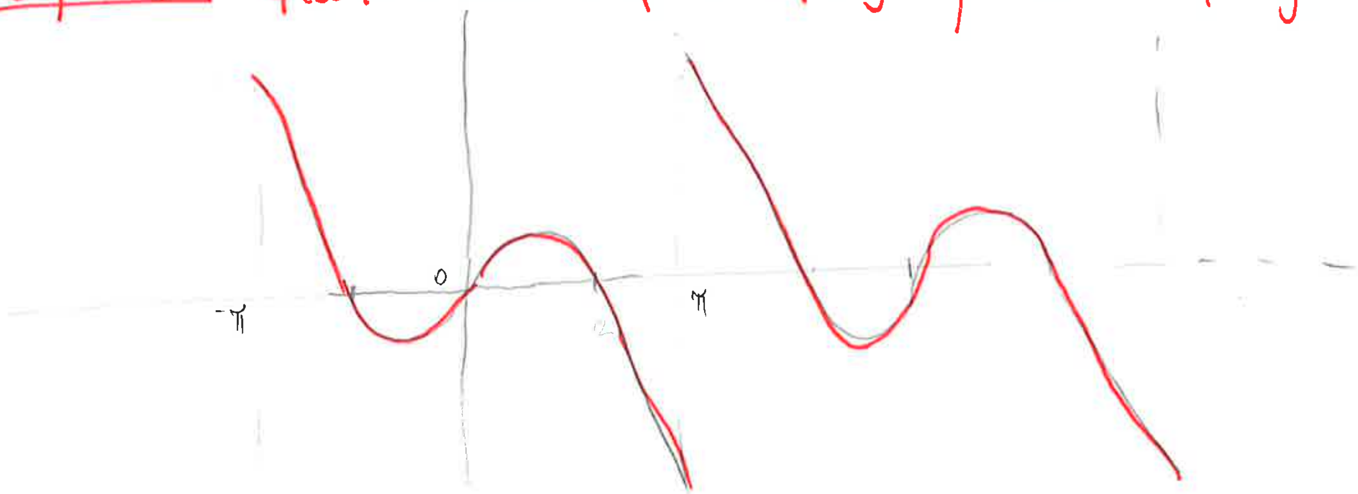
$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2}\right)$$ und

konvergiert F gleichmäßig gegen f

Daher:

$$f(x) = F(x) \quad , \forall x$$

Bsp (2) $f(x) = x\cos x$ auf $[-\pi, \pi]$ periodisch fortgesetzt



In $x \in \{-\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$ $f(x)$ ist nicht stetig $\Rightarrow$

wir haben nur punktweise Konvergenz

- $f(x)$ ist ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \underbrace{\cos x \sin(nx)}_{\frac{1}{2}\left(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right)} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin(n+1)x \, dx +$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin(n-1)x \, dx = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}$$

$n = 2, 3, \dots$

$b_1 = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2-1} \sin(nx) - \frac{1}{2}\sin x}$$

$x = (2k+1)\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; f in $(2k+1)\pi$ nicht stetig

$$f(\pi-) = \pi\cos(-\pi) = -\pi$$
$$f(\pi+) = f(-\pi) = -\pi\cos(-\pi) = \pi$$

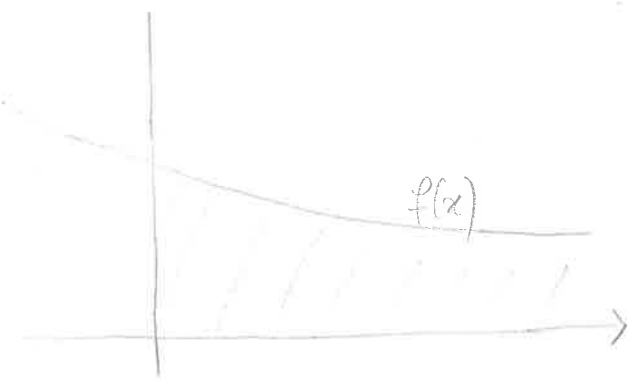
$F(x)$ Konvergiert punkweise gegen $\bar{f} = 0$

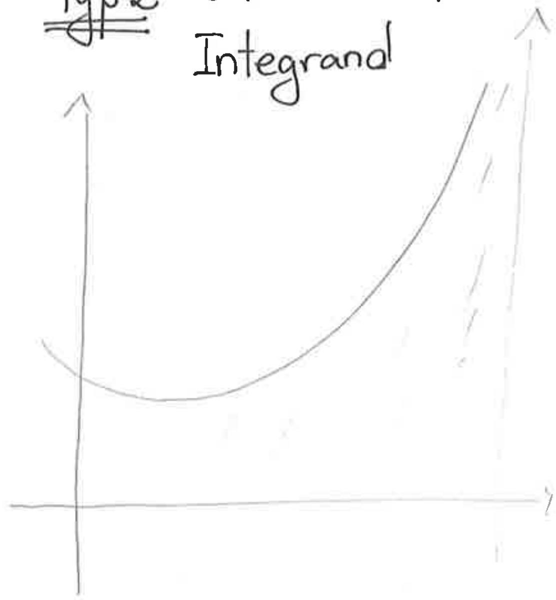
$$\bar{f}((2k+1)\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

F8 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Typ 1: Unbeschränktes Integrationsintervall

Typ 2: Unbeschränktes Integrand





Typ 1: UNBESCHRÄNKTES INTEGRATIONSINTERVALL

Def: a) Eine Fkt $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, wenn für alle $x \in [a,+\infty)$ das Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ existiert.

b) Wenn $f: [a,+\infty)$ lokal integrierbar ist, und

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\,dt} = \lim_{x \to \infty} F(x) \quad (*)$$

existiert, dann heißt $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ konvergent.

Existiert der Grenzwert in $(*)$ nicht, so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ divergent.

c) Def für $(-\infty, a]$ gleich.

d) Wenn $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, dann heißt $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergent, wenn $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ und $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ unabhängig voneinander konvergieren, (a beliebig).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to +\infty}} \int_x^y f(t)\,dt$$

Bsp:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$; $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x$$

- $F(x)$ existiert für alle $x \Rightarrow f$ lokal integrierbar
- Konv oder Div: $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$

$\int_1^{\infty} f(t)dt$ divergent.

---

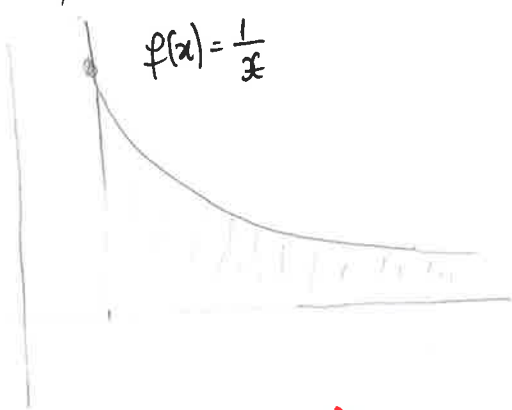
(2) $f: (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 e^t\,dt = e^t \Big|_x^1 = e - e^x < \infty$$ für alle $x \in (-\infty, 1]$

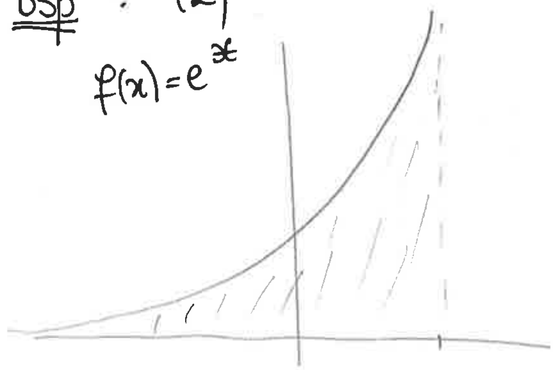
$\Rightarrow f$ lokal integrierbar.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (e - \underbrace{e^{+x}}_{0}) = e < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^1 f(t)dt \text{ Konvergiert}$$

Bsp: (1)



Bsp: (2)



Bsp (3): $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Gerade ; $f(-x) = f(x) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt :=$$

$$2 \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(2 \arctan t \Big|_0^x\right) = 2\lim_{x\to\infty} \underbrace{\arctan x}_{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

F: Wann konvergiert ein uneigentliches Integral?

Satz 1 **Konvergenz Kriterien**

Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für $f: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$

(a) Wenn $f(x)$ lokal integrierbar ist ($F(x)$ existiert) und $F(x)$ beschränkt: $\exists M: F(x) \le M, \forall x \ge a$, dann konvergiert $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

(b) Wenn $f(x)$ lokal integrierbar ist, und $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ konvergiert $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergent.

Satz 2 (Vergleichskriterium):

Seien $f, g: [a,+\infty)$ lokal integrierbar.

(a) Ist $|f(t)| \le g(t), \forall t \in [a,+\infty)$ und $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ konvergent

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)$ konvergent und.

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\right| \le \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \le \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

(b) Ist $0 \le g(t) \le f(t)$ $\forall t$ und. $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ divergent $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ divergent.

Bsp: (3) Sei $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x} = g(x) \ge 0$$

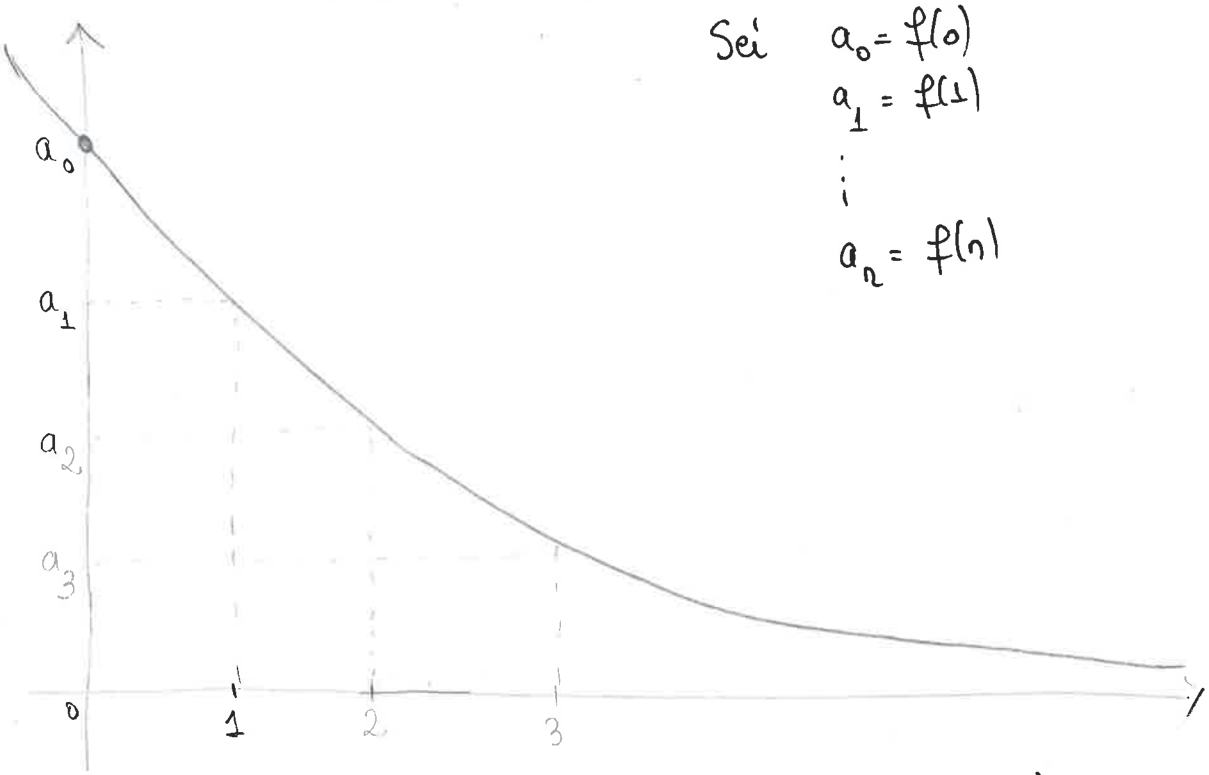
$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ divergiert (Bsp 1) $\underset{\text{Satz 2b}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dt$ divergent

(4) Sei $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$

$x^2 + 2x + 1 \geq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+1} \leq \frac{1}{x^2+1} = g(x)$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx \rightarrow$ Konvergiert (Bsp 3) $\underset{\text{Satz 2a}}{\Longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ Konvergiert.

- Sei $f: [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, monoton fallend und $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$



Sei $a_0 = f(0)$

$a_1 = f(1)$

$\vdots$

$a_n = f(n)$

$0 < 1 < 2 < 3 \ldots \rightarrow$ Zerlegung von $[0,+\infty)$

$a_i = \min_{x[i-1,i]} f(x) = \max_{x \in [i,i+1]} f(x)$

$\Rightarrow$ Untersumme für $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$: $\underset{f(1)}{a_1} + a_2 + \ldots \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

Obersumme für $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq a_0 + a_1 + \ldots$

Satz [Cauchy' Integralkriterium]:

Sei $f: [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und monoton fallend.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} f(i)$ Konvergiert genau dann, wenn $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ Konvergiert.

BSP

(1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergiert da $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left(-\frac{1}{t} \Big|_1^x \right) = 1$ Konvergiert.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergiert da $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\,dt := \lim_{x\to\infty} \int_{2}^{x} \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\,dt \overset{(=)}{}$

$\ln t = y \Rightarrow \frac{1}{t}\,dt = dy$

$$\overset{(=)}{} \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{y}\,dy = \lim_{x\to\infty} \left(\ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\ln(\ln x)}_{\infty} - \ln(\ln 2) = \infty \quad \to \text{divergent.}$$

$\boxed{\text{Typ 2}}$: UNBESCHRÄNKTER INTEGRAND

Def: (in a ist $f(a)$ $\pm\infty$)

(a) Eine Fkt. $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, wenn für alle x mit $a < x \le b$, das Integral $\int_x^b f(t)\,dt$ existiert $= F(x)$

(b) Ist $f: (a,b]$ lokal integrierbar und existiert $\underbrace{\lim_{x\to a_+} \int_x^b f(t)\,dt}_{= \lim_{x\to a_+} F(x)}$, so heißt $\int_a^b f(t)\,dt$ Konvergent. Existiert der Grenzwert nicht, so divergiert $\int_a^b f(t)\,dt$

(c) Def gleich für Fkt f auf $[a,b)$.

(d) Bei Intervalle der Form (a,b) muß das Integral in 2 uneigentliche Integrale aufgespalten werden und der Grenzübergang rechts (in a von rechts) und links (in b von links) unabhängig voneinander durchgeführt werden.

Bsp: (1) $f : (0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ist $\int_0^1 f(t)\,dt$ divergent oder konvergent?

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_x^1 t^{-1/2}\,dt = 2t^{1/2}\Big|_x^1 = 2(1-\sqrt{x})$$

$x \in (0,1]$

$F(x)$ existiert $\forall x \in (0,1] \Rightarrow f(x)$ lokal integrierbar.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+} F(x) = 2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \to \text{Konvergent}$$

Vergleichkriterium: Seien $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

1) Ist $|f(t)| \leq g(t)$ $\forall t \in (a,b]$ und $\int_a^b g(t)\,dt$ konvergent, dann ist auch $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergent und:

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt .$$

Konv. Majorante

2) **Div. Minorante:** Ist $0 \leq g(t) \leq f(t)$, $\forall t \in (a,b]$ und $\int_a^b g(t)\,dt$ divergent $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ auch divergent.

Def Sei $f : [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, mit $a < x_0 < b$.

Dann $$\int_a^b f(t)\,dt = \underbrace{\lim_{x\to x_0-} \int_a^x f(t)\,dt}_{A} + \underbrace{\lim_{x \downarrow x_0} \int_x^b f(t)\,dt}_{B} .$$

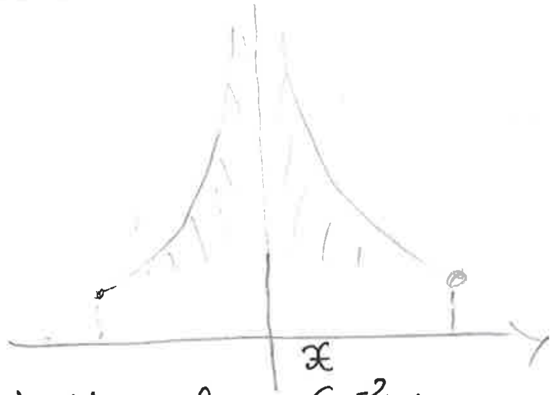
und $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergiert, wenn A und B konvergieren.

z.B. f hat einen Pol an der Stelle x_0.

Bsp (1) $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x = 0$ Polstelle $\Rightarrow$



$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \lim_{x \searrow 0} \int_{x}^{1} f(t)\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \int_{-1}^{x} t^{-2}\,dt +$$

$$+ \lim_{x \searrow 0} \int_{x}^{1} t^{-2}\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \left(\underbrace{\frac{t^{-1}}{-1}}_{-\frac{1}{t}} \Big|_{-1}^{x} \right) + \lim_{x \searrow 0} \left(\underbrace{\frac{t^{-1}}{-1}}_{-\frac{1}{t}} \Big|_{x}^{1} \right) =$$

$$= \lim_{x \nearrow 0} \left(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{+\infty} - 1 \right) + \lim_{x \searrow 0} \left(-1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \right) = +\infty \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \text{ divergiert}$$

(2) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty \Rightarrow$ Integrand unbeschränkt $\Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \to$ uneigentlich von Typ 2.

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ auf $(0,2]$

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \Rightarrow$ Integrand unbeschränkt Typ 2.

Suchen eine div. Minorante.

$$\frac{e^x}{x^2} \geq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}, \ \forall x \in (0,2], \text{ da } e^x \geq 1$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_0^2 = -\frac{1}{x} \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} + \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

$\int_0^2 \frac{1}{x^2}$ divergent $\Rightarrow \int_0^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$ divergent.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ = Konvergent oder divergent

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ Integrand bei $x=0$ eigentlich.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ Uneigentliches Integral Typ 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{<\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \; *$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \overset{P.I}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\cos t}{t}\Big|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \right)$$

$$= \cos 1 - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt}_{\text{Vergleichskriterium Konv.}}.$$

$\frac{|\cos t|}{t^2} < \frac{1}{t^2}$ und $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = \frac{-1}{x} + 1 =$

$= 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$