Mathematik B für Elektrotechnik

Ecaterina Sava-Huss

Sommersemester 2019

Systeme von DGL

Explizites System von n DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Gesucht: ein Vektor von Lösungen $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T$. Sei $F(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), \ldots, f_n(x, \vec{y}))^T$, wobei $f_n(x, \vec{y}) = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Vektorielle Schreibweise: DGL-System

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}).$$

Existenz und Eindeutigkeitssatz

DGL-System $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$.

Theorem

F sei stetig auf D und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann gibt es zu jedem $(x_0, \vec{w}) \in D$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}' & = F(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) & = \vec{w} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösungskurve $\vec{y}(x)$, die sich beidseitig bis zum Rand von D erstreckt. Falls $D = \{(x, \vec{y}) : x \in I, \vec{y} \in \mathbb{R}^n\}$, und F auf D eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, so gibt es zu jedem Anfangswert $(x_0, \vec{w}) \in D$ eine eindeutige Lösung, die auf dem gesamten Intervall I definiert ist.

Lineare Systeme 1. Ordnung

Lineares System 1. Ordnung hat die Form:

$$\boxed{\vec{y'} = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $a_{ij}(x)$ und $b_j(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ sind stetige Funktionen von x.

Definition

System heißt homogen wenn $\vec{b}(x) \equiv 0$, ansonsten inhomogen.
A heißt die Koeffizientenmatrix und $\vec{b}(x)$ ist der Störvektor.

Lineare Systeme 1. Ordnung

Fundamentalsystem = n linear unabhängigen Lösungen $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$.
Lösung des homogenen Systems:

$$\boxed{\vec{y}_{hom}(x) = C_1 \vec{y}^{[1]}(x) + \cdots + C_n \vec{y}^{[n]}(x),}$$

wobei jedes $\vec{y}^{[1]}(x)$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^n$.
Fundamentalmatrix = Wronski-Determinante W(x) von $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{[1]}(x) & y_1^{[2]}(x) & \dots & y_1^{[n]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) & y_2^{[2]}(x) & \dots & y_2^{[n]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{[1]}(x) & y_n^{[2]}(x) & \dots & y_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad W(x) = |Y(x)|.$$

Definition

Die Lösungen $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$ sind genau dann ein Fundamentalsystem wenn $W(x) \neq 0$ für alle x.

Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten

$$\vec{y'} = A\vec{y} + \vec{b}(x)$$

A Matrix mit konstanten Koeffizienten. Lösung $\vec{y}(x) = \vec{y}_{hom}(x) + \vec{y}_{sp}(x)$.

I. Lösung $\vec{y}_{hom}(x)$ der homogenen Gleichung $\vec{y'} = A\vec{y}$

Rate eine Lösung: $\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{v}$. Dann folgt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$: das charakteristische Polynom von A hat n Nullstellen.

- algebraische Vielfachheit $\mu(\lambda)$: Vielfachheit von λ als Nullstelle von $P(\lambda)$.
- Geometrische Vielfachheit $\nu(\lambda)$ = Dimension des zugehörigen Eigenraumes, Anzahl lin. unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Es gilt immer $\mu(\lambda) \geq \nu(\lambda) \geq 1$.

I. Lösung der homogenen Gleichung $\vec{y'} = A\vec{y}$

Zu jeder Nullstelle λ: $\mu = \mu(\lambda)$ linear unabhängigen zugehörige Lösungen.

Fall 1: $\mu(\lambda) = \nu(\lambda)$

Der zu λ gehörige Eigenraum ist μ-dimensional mit linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}, \ldots, \vec{v}^{(\mu)}$. Zugehörige Lösungen sind

$$e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}, \ldots, e^{\lambda x}\vec{v}^{(\mu)}$$

Fall 2: $\mu(\lambda) > \nu(\lambda)$

Der zu λ gehörige Eigenraum ist nur ν-dimensional mit linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}, \ldots, \vec{v}^{(\nu)}$, und Lösungen $e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}, \ldots, e^{\lambda x}\vec{v}^{(\nu)}$. Die fehlenden $\mu - \nu$ Lösungen erhält man durch den Ansatz

$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}$ wobei $p_i(x)$ sind Polynome vom Grad $\mu - \nu$.

I. Lösung der homogenen Gleichung $\vec{y'} = A\vec{y}$

- Fall 2a: falls $\mu = 2$ und $\nu = 1$, erste Lösung ist $\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)}$ und der Ansatz für die zweite Lösung:

$$\boxed{\vec{y}^{[2]} = xe^{\lambda x}\vec{v}^{(1)} + e^{\lambda x}\vec{v}^{(2)}, \quad \text{mit} \quad (A - \lambda I)\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)}.}$$

- Fall 2b: falls $\mu = 3$ und $\nu = 1$: erste und zweite Lösung wie oben, Ansatz für die dritte Lösung:

$$\boxed{\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2}e^{\lambda x}\vec{v}^{(1)} + xe^{\lambda x}\vec{v}^{(2)} + e^{\lambda x}\vec{v}^{(3)}, \quad \text{mit} \quad (A - \lambda I)\vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)}.}$$

- Bei komplexem Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$, rechnet man komplex. Real- und Imaginärteil einer Komplexen Lösung führen dann zu 2 reele Lösungen.
- Lösung $\vec{y}_{hom}(x)$: lineare kombination von $\vec{y}^{[1]}(x), \ldots, \vec{y}^{[n]}(x)$:

$$\vec{y}_{hom}(x) = C_1\vec{y}^{[1]}(x) + \cdots + C_n\vec{y}^{[n]}(x)$$

II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y'} = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

$\boxed{\textit{Ansatzmethode}}$: Sei

$$\vec{b}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ Polynome mit max. Grad $m \geq 0$. Sei $\mu = \mu(\lambda)$ wieder die Vielfachheit (algebraisch) von λ als Nullstelle des char. Polynoms $P(\lambda)$. Ansatz für die spezielle Lösung:

$$\vec{y_{sp}}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ Polynome mit Grad $m + \mu$ und unbekannten Koeffizienten sind. Durch Einsetzen in das inhomogene DGLS und Koeff.vergleich, erhält man lineare Gleichungen, die zu lösen sind.

II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

- Wenn
$$\vec{b}[x] = \vec{b}^{[1]}(x) + \cdots + \vec{b}^{[r]}(x),$$
wobei jedes $\vec{b}^{[k]}$ von der obigen Form ist, und jedes $\vec{b}^{[k]}$ hat ein λ_k zugeordnet, dann hat man r spezielle Lösungen.
- Wenn
$$\vec{b}(x) = e^{\alpha x}\left[\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \cos(\beta x) + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \sin(\beta x)\right]$$
- Da $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$, können wir $\cos(\beta x)$ und $\sin(\beta x)$ wir folgt umschreiben:
$$\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right), \quad \sin(\beta x) = -\frac{i}{2}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right).$$

II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in $\vec{b}(x)$ ein:

$$\vec{b}(x) = \underbrace{e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\right]}_{=:\vec{b}_1(x)} +$$

$$+ \underbrace{e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\right]}_{=:\vec{b}_2(x)}$$

Das heißt, wir können den Störvektor zerlegen in $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$.
Man beachte, dass $\vec{b}_2(x) = \overline{\vec{b}_1(x)}$.

II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Wir berechnen nun zum System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ eine spezielle (komplex-wertige) Lösung $\vec{y}_{1,sp}(x)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix},$$

wobei $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ Polynome mit unbekannten Koeffizienten sind vom Grad $\mu(\alpha + i\beta) + m$, wobei m der maximal auftretende Grad der Polynome $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ ist und $\mu(\alpha + i\beta)$ die Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle im charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist. Man leitet dann $\vec{y}_{1,sp}(x)$ komponentenweise nach x ab, setzt in das inhomogene DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ ein und mittels Koeffizientenvergleich werden die (eventuell komplexwertigen) Koeffizienten von $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ bestimmt.

II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Beobachtung: $\vec{y}_{2,sp}(x) := \overline{\vec{y}_{1,sp}(x)}$ ist dann eine spezielle Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_2(x)$, denn:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{2,sp}'(x) &= \overline{\vec{y}_{1,sp}'(x)} = \overline{A\vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{b}_1(x)} = \overline{A}\,\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \overline{\vec{b}_1(x)} \\ &= A\,\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \vec{b}_2(x) = A\,\vec{y}_{2,sp}(x) + \vec{b}_2(x). \end{aligned}$$

Somit ist eine spezielle (reellwertige) Lösung zum Störvektor $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = \vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{y}_{2,sp}(x) = 2\mathrm{Re}\big(\vec{y}_{1,sp}(x)\big).$$