

# Mathematik B (ET) Sommersemester 2019

## 1. Übungsblatt (7.3.2019)

---

**Beispiel 1.** Sei  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  definierte Abbildung. (3 Pkt.)  
Finden Sie die allgemeine Formel für die  $n$ -te Ableitung von  $f$  und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

**Beispiel 2.** Sei  $f$  die Funktion aus Beispiel 1. (je 2 Pkt.)

- (a) Geben Sie die Taylorreihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  an.  
(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 2$  und schätzen Sie das Restglied auf dem Intervall  $[1, 3]$  ab.

**Beispiel 3.** Bestimmen Sie Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  derart, dass die Funktionen (3 Pkt.)

$$f(x) = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{und} \quad g(x) = a(e^{bx} - 1)$$

in der Taylorentwicklung um  $x_0 = 0$  bis zu möglichst hohen Potenzen von  $x$  übereinstimmen.

**Beispiel 4.** Untersuchen Sie die Funktionenfolge  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch (3 Pkt.)  
 $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$  definiert ist, auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

**Beispiel 5.** Berechnen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen (je 2 Pkt.)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n^2}, \\ \text{(b)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (x-1)^n, \\ \text{(c)} & \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} x^n, \\ \text{(d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{1+2^n}. \end{array}$$

**Beispiel 6.** Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der Potenzreihen (je 2 Pkt.)

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^{n+1} x^n, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

**Beispiel 7.** Berechnen Sie den Wert der unendlichen Summe (2 Pkt.)

$$s = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots$$

durch Differenzieren der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ .