Mathematik B (ET) Sommersemester 2019

11. Übungsblatt (6.6.2019)

Hinweis: Überlegen Sie sich immer zuerst, welche Integrationsreihenfolge Sie verwenden wollen.

Beispiel 60. Berechnen Sie die Integrale **(3 Pkt.)**

$$\iint_{B_1} 4\sinh(1+x^2)dxdy \qquad \text{und} \qquad \iint_{B_2} x^3e^{-y} + \frac{\sin(y)}{1+x^2}\,dxdy,$$

wobei B_1 das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$, sowie B_2 das Rechteck $[-1,1]\times[0,2\pi]$ ist.

Beispiel 61. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = 6xy$ über den Bereich B, der durch $9x^2 + 16y^2 \leq 144$, $5y \leq 2x + 8$ und $2x \leq 8 - 3y$ definiert ist. **(3 Pkt.)**

Beispiel 62. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation **(3 Pkt.)**

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Integrals $\iint_B (2x+64y^2)dxdy$, wobei B der von den vier Kurven $y = \frac{1}{4x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{x}{4}$ und $y = 4x$ berandete Bereich ist.

Beispiel 63. Ermitteln Sie die Jacobideterminante der Variablentransformation **(3 Pkt.)**

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad z = z$$

in Zylinderkoordinaten und verwenden Sie diese, um das Integral der Funktion $f(x,y,z) = 21xyz$ über den Bereich

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$$

zu berechnen.

Beispiel 64. Auf die kreisförmige Grundfläche mit Radius R eines Zylinders der Höhe H wird eine Halbkugel vom Radius R geklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) annehmen, damit der Schwerpunkt des entstandenen Körpers genau im Mittelpunkt der Klebefläche liegt? Die Dichte ist hierbei konstant $\rho = 1$. *Sie dürfen bekannte Formeln für die Masse des Zylinders und der Halbkugel – nicht aber Formeln für deren Schwerpunkte – ohne Beweis verwenden.* **(3 Pkt.)**

Beispiel 65. Berechnen Sie die Kurvenintegrale **(je 2 Pkt.)**

(a) von $f(x,y) = 2(x+\sqrt{3})\sqrt{y+1}$ entlang der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,t \\ t^2 - t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1;$$

(b) von

$$\vec{V}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$