# Mathematik B (ET) Sommersemester 2019

2. Übungsblatt (14.3.2019)

---

**Beispiel 8.** Rechnen Sie mit Hilfe von Taylorreihen die folgenden Grenzwerte aus! (je 3 Pkt.)

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sin(x) - x} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\ln(1-x^2)}$$

**Beispiel 9.** Bestimmen Sie die Taylorreihen der Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. (3 Pkt.)

**Beispiel 10.** Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorreihen aus Beispiel 9 den Grenzwert (3 Pkt.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sinh(x) + \cosh(x) - ex}{(x-1)^2}.$$

**Beispiel 11.** Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der Potenzreihen (je 2 Pkt.)

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n}, \quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n n^2}, \quad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^n}{7^n (n+1)}, \quad \text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-3)^n}{7^n (n+1)}.$$

**Beispiel 12.** Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen zu: (je 2 Pkt.)

(a) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, äquidistante Zerlegung auf $[0, \pi]$ in 4 Teilintervalle.

(b) $f(x) = \cos(x)$, Zerlegung von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, 0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\}$.

**Beispiel 13.** Sei $f(x) = x^2 - x$ und $0 < b$. (je 2 Pkt.)

(a) Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $f$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung von $[0, b]$ in $\{x_0, \ldots, x_n\}$ für allgemeines $n$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Ober- und Untersummen den Wert des Integrals von $f$ über $[0, b]$.

*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Beispiel 14.** Sei (je 2 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie (analog wie für beschränkte Funktionen) die Ober- und Untersummen von $f$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung von $[0, 1]$ in $\{x_0, \ldots, x_n\}$ für allgemeines $n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Untersummen aus Teil a für $n \to \infty$ beliebig groß werden.