Mathematik B (ET) Sommersemester 2019

7. Übungsblatt (2.5.2019)

Beispiel 37. Gegeben seien die Funktionen **(je 2 Pkt.)**

$$f_1\colon D_1 \to \mathbb{R} \text{ mit } D_1 = (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}, \qquad f_1(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

$$f_2\colon D_2 \to \mathbb{R} \text{ mit } D_2 = (\mathbb{R}\setminus\{0\})^2, \qquad f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}.$$

(a) Gibt es eine stetige Funktion $g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $g_1(x,y) = f_1(x,y)$ für alle $(x,y) \in D_1$?

(b) Gibt es eine stetige Funktion $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $g_2(x,y) = f_2(x,y)$ für alle $(x,y) \in D_2$?

Beispiel 38. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{x^2-yz} - 2y.$$

Beispiel 39. An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2+xy-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

partiell differenzierbar? Geben Sie ggf. den Gradienten an.

Beispiel 40. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = \sin(xy) + \cos(x-y)$$

im Ursprung in Richtung $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Beispiel 41. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ in $(0,0)$ stetig ist. Untersuchen Sie anschließend für alle $\vec{v} = (a,b)$ mit $\|\vec{v}\| = 1$, ob die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung $\vec{v}$ existiert. Geben sie ggf. den Wert der Richtungsableitung an.

Beispiel 42. Berechnen Sie sämtliche Richtungsableitungen der Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{4x^3+4xy^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$. Bestimmen Sie anschließend, für welchen Winkel φ die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ maximal ist.