Mathematik B (ET) Sommersemester 2019

8. Übungsblatt (9.5.2019)

Beispiel 43. Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit **(2 Pkt.)**

$$f(x,y,z) = \frac{z+x^2}{2+y^2}$$

auf totale Differenzierbarkeit.

Beispiel 44. An welchen Stellen ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

partiell differenzierbar, an welchen Stellen ist sie total differenzierbar?

Beispiel 45. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Fläche **(2 Pkt.)**

$$z = f(x,y) := 3x^2y + \frac{2\ln(y)}{x} - 2y$$

im Punkt $\big(2, 1, f(2,1)\big)$.

Beispiel 46. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Tangentialebene der Fläche **(3 Pkt.)**

$$z = f(x,y) := x^3 + 3xy - y^3$$

in einem allgemeinen Punkt $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$. Für welche x_0, y_0 ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $\mathcal{E}_1\colon x - y = \frac{z}{3}$?

Beispiel 47. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x,y)$ betrachten wir die dazugehörige Funktion $F(r,\varphi) := f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$ in Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f und F immer die Bedingung **(3 Pkt.)**

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

erfüllen, wobei die Funktionen auf der linken Seite an der Stelle (r,φ) und die Funktionen auf der rechten Seite an der Stelle $(x,y) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$ betrachtet werden.

Berechnen Sie außerdem für die Funktion f aus Beispiel 46 die partiellen Ableitungen von F mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

Beispiel 48. Berechnen Sie die Taylorentwicklungen 2. Ordnung der Funktionen **(je 2 Pkt.)**

(a) $f(x,y,z) = x\sqrt{y^2 - z}$ mit Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1,2,3)$;

(b) $g(x,y) = (x-2y)\ln(2x+y)$ mit Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (e,-e)$.