

1 Die Zahlen

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die jeweiligen Ungleichungen gelten: (je 2 Pkt.)
- (a) $0 \leq |x - 6| - |x| \leq 6$ (b) $x^2 - |x| - 2 < 0$ (c) $\frac{x+1}{|x-1|+1} > 1$
 (d) $||x - 2| - 3| < 4$ (e) $|x - a| + |x - b| \leq b - a$, wobei $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. (a) Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. (2 Pkt.)
 (b) Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{x+y}{|x+y|+1} \leq \frac{|x|}{|x|+1} + \frac{|y|}{|y|+1}$ (3 Pkt.)
3. Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl $d \in \mathbb{Q}$ gibt, welche die Gleichung $d^3 = 5$ erfüllt. (3 Pkt.)
4. Bestimmen Sie – falls existierend – das Supremum und das Infimum der nachfolgenden Mengen reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima? (je 3 Pkt.)
- (a) $\{x \mid x = 3 + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ (b) $\{x \mid x = (2^n)^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$
 (c) $\{x \mid x = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x-2)^2 \leq 6\}$
 (e) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n > m \geq 1\}$ (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m-2n}{m+n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$
 (g) $\{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 1\}$ (h) $\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{2} < x \leq 2\}$
5. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: (a,b: 2 Pkt.)
(c-f: 3 Pkt.)
- (a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
 (c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (d) $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
 (e) $\sum_{k=0}^n 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1} \cdot (3^{n+1} - 1)$ (f) $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$
6. Beweisen Sie, dass für $r \neq 1$ (4 Pkt.)
- $$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
7. Finden Sie eine Formel für die folgenden Ausdrücke und beweisen Sie sie: (je 4 Pkt.)
- (a) $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$
 (b) $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2$
- (Hinweis:** Man betrachte die Ausdrücke $1 + 2 + \dots + 2n$ bzw. $1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2$.)
8. Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion: (3 Pkt.)
 Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: 3 teilt $2 \cdot 4^{n-1} + 1$.
9. Berechnen Sie (je 3 Pkt.)
- (a) $\left| \frac{3 + 4i}{2 - 5i} \right|$ (b) $\left| \frac{(1 + 2i)^5}{i^7(2 + 3i)^2} \right|$ (c) $\left| \frac{i^3(2 + i)^2}{(3 + i)(2 + i)(1 + 2i)} \right|$

10. Stellen Sie in Polarkoordinaten dar: (a,b: 2 Pkt.)
(c,d: 3 Pkt.)
- (a) $3 + 3i$ (b) $\frac{1+i}{1-i}$ (c) $\frac{i\sqrt{2}}{4+4i}$ (d) $\frac{2+3i}{5+4i}$
11. Berechnen Sie die folgenden Wurzeln und stellen Sie sie in der komplexen Zahlenebene dar: (je 3 Pkt.)
- (a) $\sqrt{1+i}$ (b) $\sqrt[4]{-4}$ (c) $\sqrt[3]{-2i}$ (d) $\sqrt[5]{3}$
12. Berechnen Sie: (je 2 Pkt.)
- (a) $(2+3i)^{16}$ (b) $(2+i\sqrt{5})^{11}$
13. Zeigen Sie, dass $\bar{z}^2 = z^2$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. (2 Pkt.)
14. Seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| = |z| = 1$. Zeigen Sie, daß $|yz| = 1$ und daß $|y^{-1}| = 1$. (2 Pkt.)
15. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $\operatorname{Re}(\frac{\bar{z}}{2z})$ und $\operatorname{Im}(i/z^2)$. (3 Pkt.)

2 Folgen und Reihen

16. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Monotonie und Konvergenz, und geben Sie (außer bei (e)) die Häufungspunkte an ($n \in \mathbb{N}$). (a,b: 3 Pkt.)
(c-g: 4 Pkt.)
- (a) $a_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 1)$ (b) $a_n = \frac{4n^2 + 2n - 3}{2n^2 - n + 1}$ (c) $a_n = \frac{(n+i)^2 - 2ni}{n^2 + 1 - i}$
- (d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+c} - \sqrt{n^2-c} + 1)}$, ($c > 0$) (e) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
- (f) $a_n = \frac{1}{2^{(n+1)/2}} \cos n^2\pi + i \cdot (-1)^n \frac{2n-1}{n+2}$, ($i = \sqrt{-1}$) (g) $a_n = \frac{(n-1)(n+3)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-1}$
17. Gegeben ist die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{2n^2}{4n^2+n}$. (4 Pkt.)
- Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}$. Für $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ bestimme man die kleinste Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt.
18. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}$ fallend und beschränkt ist. (4 Pkt.)
19. Ermitteln Sie das Bildungsgesetz (Rekursion) der Folge $\{a_n\}$ deren Glieder wie folgt ermittelt werden: (4 Pkt.)
 $a_1 = a_2 = 1$ und alle weiteren Folgenglieder ergeben sich als Quadratwurzel aus der Summe der beiden unmittelbaren Vorgänger des zu ermittelnden Folgengliedes in der Folge $\{a_n\}$. Geben Sie ferner die ersten 6 Folgenglieder an. Zeigen Sie, daß die Folge monoton wachsend und beschränkt ist. Welchen Grenzwert besitzt die Folge?
20. Man beweise: Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{5}$ ist monoton wachsend und beschränkt. (4 Pkt.)
 Man bestimme ihren Grenzwert.

21. Zeigen Sie, dass die folgenden rekursiv gegebenen Folgen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert: (je 4 Pkt.)

(a) $a_1 = 3; a_{n+1} = \frac{1}{3 + a_n^2}$ (b) $a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{6 + 5a_n}$

(c) $a_1 = 4; a_{n+1} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}a_n^2}$ (d) $a_1 = 1, a_2 = 2; a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$.

22. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \cos(n^2)}{3n+2}$. (3 Pkt.)

23. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge $a_n = \frac{3n+2 \sin(n^3/2) \cos^n(2n+1)}{4n+5}$. (3 Pkt.)

24. Zeigen Sie, daß die rekursiv gegebene Folge nicht konvergiert: (3 Pkt.)

$a_1 = 1, a_2 = 2; a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$.

25. Zeigen Sie mit Hilfe des Vergleichskriteriums das Konvergenzverhalten folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n - 1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 + 1}(n + 1)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sqrt{n^2 - n + 3}}{3^{n/2} \sqrt{n^2 + 4}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 3 \ln(n)}$

26. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums das Konvergenzverhalten folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{3^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{4}\right)^n$.

27. Untersuchen Sie die Konvergenz bzw. die absolute Konvergenz folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+1)}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{(3n-1)!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!}$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 5^n}$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$
 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1} - 1}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n+1) + (-1)^n}{2^{n-1}}$

28. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. (3 Pkt.)

29. Bestimmen Sie die Summenwerte der folgenden Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{5^n} + \frac{9}{8^n} - \frac{2}{3^n} \right]$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{4^{n/2}} - 3 \cdot \frac{4^n}{n!} \right]$

30. Zeigen Sie, daß folgende Reihe konvergiert und bestimmen Sie deren Summenwert: (3 Pkt.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$$

(Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+3)}$ als $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+3}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.)

3 Funktionen

3.1 Elementare Funktionen

31. Bestimmen Sie den größten Definitionsbereich (in \mathbb{R}) der nachfolgenden Funktionen und untersuchen Sie die Funktionen in Bezug auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Beschränktheit und Monotonie. Es reicht fürs erste, wenn Sie die Eigenschaften feststellen; Sie müssen sie nicht beweisen. (je 3 Pkt.)

(a) $f(x) = 2x^5 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + \sqrt{x+2}$ (c) $f(x) = 2x^4 + \sqrt{2-3x^2}$
(d) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2-4}$ (e) $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

32. Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen (je 2 Pkt.)

(a) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2}$ (b) $f(x) = -x^3 + 4$ (c) $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$

33. Für die Funktionen $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ bestimme man den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Bildbereich, die Intervalle, auf denen f monoton wächst und fällt und die Intervalle, auf denen $f(x) < 0$ ist. (3 Pkt.)

34. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck, bestimmen Sie dann den maximalen Definitionsbereich (in \mathbb{R}), und skizzieren Sie den Graphen: (4 Pkt.)

$$f(x) = \left(\frac{(\sqrt{x^3} - \sqrt{8})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x + \sqrt{2x} + 2} \right)^2 + \sqrt{(x^2 + 2)^2 - 8x^2}.$$

35. Welche der nachfolgenden Funktionen hat auf dem Definitionsintervall $[-2, 2]$ eine inverse Funktion? Wie lautet diese? (Skizze!) (je 2 Pkt.)

(a) $f(x) = x^4 - 1$ (b) $f(x) = -x^3 + 5$ (c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ (d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

36. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen inverse Funktionen besitzen, und berechnen Sie ggf. diese: (je 2 Pkt.)

(a) $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ (b) $g: (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x}{|x-2|}$

37. Es sei $f(x) = x - 2$ und $g(x) = (x+1)^2 - 2$. Berechnen Sie $f+g$ und $f-g$ und zeichnen Sie die entsprechenden Graphen. Ermitteln Sie die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$. (3 Pkt.)

38. Es sei $f(x) = -x^2 + 2$, $g(x) = x^3 - \sqrt{x} + 3$. Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. (2 Pkt.)

39. Werten Sie mit Hilfe des Hornerchemas folgende Polynome an den gegebenen Stellen aus: (je 2 Pkt.)

(a) $p_1(x) = x^7 - 2x^6 - 8x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 2$; gesucht ist $p_1(4)$.
(b) $p_2(x) = x^9 - 4x^8 + 10x^6 - 8x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$; gesucht ist $p_2(2)$.
(c) $p_3(x) = x^6 - 5x^5 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 12x - 20$; gesucht ist $p_3(5)$.

40. Man berechne mit Hilfe des Hornerchemas: (je 3 Pkt.)

(a) Für das Polynom $p(x) = x^6 + x^5 - 18x^4 + 19x^3 - 10x + 3$ berechne man $p(3)$ sowie $p(x)/(x-3)$.
(b) Für das Polynom $p(x) = 2x^7 + 13x^6 + 21x^5 + 30x^4 - 5x^3 - 33x^2 - 36x + 20$ berechne man $p(-5)$ sowie $p(x)/(x+5)$.

41. Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^5 - 6x^4 - 38x^3 + 192x^2 + 325x - 1050$, von dem man weiß, daß es ausschließlich ganze Zahlen als Nullstellen besitzt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes diese Nullstellen. (4 Pkt.)

42. Bestimmen Sie zu folgenden Daten die zugehörigen Interpolationspolynome (a: je 2 Pkt.)
(b: je 3 Pkt.)

x_i	-3	0	1	2	3
$p_1(x_i)$	0	2	0	-1	1
$p_2(x_i)$	1	-1	0	1	0
$p_3(x_i)$	6	0	3	1	0

mit Hilfe der (a) Lagrangeschen Interpolationsformel, (b) des Newton-Verfahrens.

43. Einer Wertetafel entnimmt man (je 3 Pkt.)

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	1	-1	2	5
$f_2(x)$	-1	2	1	0

Berechnen Sie die Werte der zugehörigen Interpolationspolynome an den Stellen -1 und 5 mit Hilfe des Hornerchemas.

44. Mittels Polynomdivision bestimme man den ganzen Anteil von (je 2 Pkt.)

(a) $\frac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ (b) $\frac{x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - x - 1}$

45. Zur Darstellung elektrostatischer Potentiale benötigt man die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$, die rekursiv definiert sind durch (4 Pkt.)

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bestimmen Sie explizit P_2, P_3, P_4 und P_5 . Berechnen Sie mit Hilfe des Hornerchemas daraus $P_5(5)$.

46. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktionen mit Hilfe der Einsetzmethode: (je 4 Pkt.)

(a) $\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2(x^2 + 1)}$ (b) $\frac{2x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 16x - 12}{(x + 1)^2(x^2 - 3)^2}$ (c) $\frac{3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 9x - 8}{(x - 2)^3(3x^2 + 1)}$

47. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktionen durch Koeffizientenvergleich: (je 4 Pkt.)

(a) $\frac{2x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 - 2x + 1)}$ (b) $\frac{x^3 - x^2 - 3x + 4}{(x - 1)^4}$ (c) $\frac{4x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 2}{(x + 1)^2(2x^2 + 1)^2}$

48. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Parameter a und b die reellen Lösungen der Gleichungen: (je 3 Pkt.)

(a) $ae^{-2x} + be^{-x} = 0$ (b) $e^{2x} + ae^x - \ln e^{-a^2/4} = 0$
(c) $(\ln(bx))^2 + \ln x - (\ln b)^2 = 0 \quad (b > 0)$

49. Beweisen Sie folgende Gleichungen: (a: 2 Pkt.)

(a) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ (b: 3 Pkt.)
(b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

50. Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] : x \mapsto \coth(2x - 1)$. (3 Pkt.)

51. Drücken Sie $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ in $t = \tan \frac{x}{2}$ aus. (4 Pkt.)

52. Zeigen Sie folgende Gleichungen für zulässige $x \in \mathbb{R}$: (je 2 Pkt.)

(a) $\frac{1}{\sin x} = \cot x + \tan \frac{x}{2}$ (b) $\cos^2 x = \frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x}$.

53. Vereinfachen Sie: (je 2 Pkt.)

(a) $\tan(\operatorname{arccot} x)$ für $x \in [0, \pi/2)$ (b) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x| < 1$

(c) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

54. Der Ausdruck $\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$ hat für $x > 1$ einen konstanten Wert. Man bestimme diesen. (4 Pkt.)

3.2 Grenzwerte, Stetigkeit

55. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent): (je 3 Pkt.)

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{x^2 + 6x + 5}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \cos \frac{1}{x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 4x - 1}$

56. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen sämtliche Asymptoten: (je 3 Pkt.)

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ (b) $f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 - x - 2}$

57. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und diejenigen Werte für x , an denen die folgenden Funktionen stetig, bzw. links- oder rechtsseitig stetig sind. Beheben Sie, falls möglich, Unstetigkeitsstellen. (je 3 Pkt.)

(a) $f_1(x) = \begin{cases} -3 & x = -2 \\ 3 & x = 3 \\ \frac{x^3 - 7x - 6}{2^{1/x}(x^3 + 4x^2 - 11x - 30)} & \text{sonst} \end{cases}$ (b) $f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x = 0 \\ 3 & x = 9 \\ 2 & x = 16 \\ \frac{\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{x(x+2)} - 9\sqrt{x+3} - \sqrt{81(x+2)}}{x - 7\sqrt{x+12}} & \text{sonst} \end{cases}$

58. Fällt Licht mit dem Einfallswinkel α auf einen Spalt, wird es gebeugt. Für die Intensität $f(\beta)$ des gebeugten Lichtes in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β (β ist die Abweichung von der Lotrichtung der Spaltebene) gilt folgende Formel: (3 Pkt.)

$$f(\beta) = \frac{\sin^2(k(\sin \alpha - \sin \beta))}{(\sin \alpha - \sin \beta)^2} \quad (\alpha \neq \beta)$$

Dabei ist $k = \frac{\pi a}{\lambda}$, wobei a die Spaltbreite und λ die Wellenlänge des Lichtes ist. Welche Art von Unstetigkeit hat die Funktion $f(\beta)$ an der Stelle $\beta = \alpha$?

59. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^x(2 \ln x + 1) = 5$ im Intervall $(0.5, 3)$ eine Lösung besitzt. Ist diese Lösung eindeutig? (3 Pkt.)

60. Bestimmen Sie numerisch mit Hilfe des Bisektionsverfahren die Nullstelle des Polynoms $x^3 + 4x^2 - 5x - 8$ im Intervall $[1, 2]$ bis auf eine Genauigkeit von $\epsilon = 0.05$. (3 Pkt.)

61. Zeigen Sie die gleichmässige Stetigkeit mit Hilfe der Definition: (je 3 Pkt.)

(a) $f_1(x) = x^2 + 1$ für $2 < x < 3$ (b) $f_2(x) = \sqrt{x}$ für $x > 1$

4 Vektor- und Matrizenrechnung

62. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des \mathbb{R}^n ? (je 3 Pkt.)

- (a) $\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_n = c\}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (b) $\{\vec{x} : x_1 + x_2 \geq 0\}$
(c) $\{\vec{x} : x_1 x_n = 0\}$ (d) $\{\vec{x} : x_1 = 0\} \cap \{\vec{x} : x_n = 0\}$
(e) $\{\vec{x} : x_1 = 0 \text{ oder } x_n = 0\}$ (f) $\{\vec{x} : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$

63. Überprüfen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit: (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -3, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, -4, 1), \quad \vec{v}_3 = (-1, 4, 6, -1).$$

64. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(\alpha, 0, 2), (1, \beta, 0), (0, \alpha, 1)$ linear abhängig? (4 Pkt.)

65. Für welche reellen Werte von β sind die drei Vektoren (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{v}_2 = (\beta, 1, -1), \quad \vec{v}_3 = (1, \beta, 1).$$

linear unabhängig? Berechnen Sie im Fall $\beta = 2$ eine Basis des von drei Vektoren aufgespannten Untervektorraums und bestimmen Sie dessen Dimension.

66. Die Vektoren $\vec{u} = (1, 2, 3, -2), \vec{v} = (2, -3, 1, 2), \vec{w} = (-3, 8, 1, -6)$ erzeugen einen Unterraum U des \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie die Dimension von U . (3 Pkt.)

67. Man stelle $\vec{x} = (3, 2, 3)$ als Summe zweier zueinander orthogonaler Vektoren dar, wobei die eine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{y} = (1, 0, 1)$ weisen soll. (3 Pkt.)

68. Für welchen reellen Werte von α, β, γ sind die drei Vektoren (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (1, \alpha, 2), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, \beta), \quad \vec{v}_3 = (\gamma, 1, \beta).$$

linear abhängig? Es gelte ab jetzt $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Sind die beiden Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 orthogonal zueinander? Projizieren Sie den Vektor \vec{v}_3 auf die vom Vektor \vec{v}_1 erzeugte Gerade.

69. (a) Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des von den Vektoren (4 Pkt.)

$$\vec{x} = (0, 1, 1, 0), \quad \vec{y} = (0, 1, 0, 1), \quad \vec{z} = (0, 1, 1, 1)$$

aufgespannten Unterraumes von \mathbb{R}^4 .

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der Vektoren $\vec{u} = (0, -1, 0, 1)$ und $\vec{v} = (0, 0, -2, 1)$ bezüglich der oben berechneten Orthonormalbasis. Wie lässt sich $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ mit Hilfe der Fourierkoeffizienten schnell berechnen? (3 Pkt.)

(c) Projizieren Sie die Vektoren $(3, 2, 3, 1)$ und $(-1, 0, 4, 2)$ auf den Unterraum von (a). (2 Pkt.)

70. Bestimmen Sie für den von folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraum eine Orthonormalbasis mit Hilfe der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung: (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1 = (2, 3, 1) \quad \vec{v}_2 = (4, 1, 3) \quad \vec{v}_3 = (-1, 3, 7)$$

71. Berechnen Sie die Ebenengleichung zur Ebene (2 Pkt.)

$$(2, 1, 3) + \lambda(1, 0, 2) + \mu(-1, 1, 0).$$

72. Berechnen Sie jeweils eine Parameterdarstellung der Ebene, die durch folgende Gleichung gegeben ist: (je 2 Pkt.)

$$(a) \quad 3x - y + 2z = 4 \qquad (b) \quad 2x + y - 2z = 2$$

73. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen $x + 2z = 3$ und $2y + z = 1$? (4 Pkt.)

74. Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Geben Sie ggf. die Matrixdarstellung der linearen Abbildung an. (je 2 Pkt.)

(a) $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n ix_i,$

(b) $g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$

(c) $h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i} + x_i),$

(d) p sei die Projektion im \mathbb{R}^2 auf die Gerade, die durch den Vektor $(1, 1)$ gegeben ist.

75. Sei $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Funktion, welche jeden Punkt zuerst an der y -Achse spiegelt und dann um 60 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von P . (3 Pkt.)

76. Drehen Sie das Dreieck $A = (3, 2), B = (3, 4)$ und $C = (1, 5)$ um 45° im mathematisch negativen Sinne (d.h. im Uhrzeigersinn) um den Ursprung. (2 Pkt.)

77. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $y = Ax$ mit (je 2 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

78. Lösen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme $Ax = 0$ mit (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

79. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -5 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

80. Für welche Werte von k hat das lineare Gleichungssystem (4 Pkt.)

$$\begin{aligned} (k+1)x + y + kz &= k+2 \\ x + 2ky + -kz &= k-1 \\ 2x + ky + kz &= -2 \end{aligned}$$

(i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen bzw. (iii) keine Lösung? Für die Fälle (i) und (ii) sind die Lösungen in Abhängigkeit von k anzugeben.

81. Berechnen Sie $\det A$, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (3 Pkt.)

durch Entwicklung nach (a) der dritten Zeile und (b) der zweiten Spalte und (c) durch Transformation in Zeilennormalform.

82. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. (4 Pkt.)

(a) Für welche Werte von α existiert die Inverse A^{-1} ?

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von α !

83. Für welche reellen Werte von α besitzt folgendes Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) keine Lösungen oder (iii) unendlich viele Lösungen? Geben sie alle möglichen Lösungen an! (4 Pkt.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \end{array} \right)$$

84. Berechnen Sie $\det A$ für (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & a+b & c \\ 1 & a & b+2c \\ 2 & b+c & a \end{pmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$.

85. Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. (4 Pkt.)

Bestimmen Sie a so, dass das Gleichungssystem $ABx = 0$ nichttrivial lösbar wird, und geben Sie die allgemeine Lösung an!

86. Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die inversen Matrizen: (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

87. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Cramerschen Regel, wobei (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

88. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis an oder verweisen Sie auf einen Satz aus der Vorlesung und geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. Achten Sie genau auf die Voraussetzungen!) (4 Pkt.)

(a) Der Nullvektor ist in jedem Untervektorraum des \mathbb{R}^n enthalten.

(b) Wenn $(n+1)$ Vektoren des \mathbb{R}^n linear abhängig sind, dann ist einer der Vektoren der Nullvektor.

(c) Je n Vektoren des \mathbb{R}^n sind linear unabhängig.

(d) Sind die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} linear abhängig, so kann jeder dieser Vektoren als Linearkombination der beiden anderen dargestellt werden.

89. Berechnen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte, ihre Eigenräume sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten: (je 3 Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

90. Finden Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so daß $T^{-1}AT = D$, wobei (4 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Differentialrechnung

91. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen differenzierbar sind: (je 2 Pkt.)

- (a) $f_1(x) = \frac{|x+1|}{e^{x-1}}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$
 (b) $f_2(x) = x \cos|x|$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$
 (c) $f_3(x) = \frac{\sin|x|}{\cos x}$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

92. Überprüfen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie ggf. die Ableitung, wo vorhanden: (je 2 Pkt.)

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (b) g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

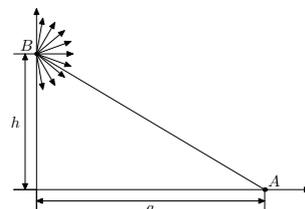
93. Differenzieren Sie die Funktionen (je 3 Pkt.)

- (a) $f_1(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{ax^2 + x}}$ (b) $f_2(x) = \arctan \sqrt{\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} - 1}$ (c) $f_3(x) = \ln \sqrt{\frac{x + \cos x}{2 - \tan x}}$
 (d) $f_4(x) = (2x + 1)^x$ (e) $f_5(x) = (x - 1)^{(x+1)^x}$ (f) $f_6(x) = ((x - 1)^{x+1})^x$
 (g) $f_7(x) = (x^2 + 1)^{(3^x)}$ (h) $f_8(x) = \cosh x \cdot \sqrt{\frac{\tanh x}{x}}$

94. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte: (je 3 Pkt.)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x - \sinh x}{x - \sinh x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 3x}{e^{x+2}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 5}{x^2 - 3} - \frac{x^2 + 2}{x + 1} \right)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{e^x \cdot \sin x}{\ln(x + 1)}}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2}(e^{1/x} - 1)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{\frac{x^2}{1-e^{-x}}} + 3^{-\frac{x}{1-e^x}}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{5 \cos x - \cos(5x)}{5 \cot x - \cot(5x)}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - 2x)$

95. Die Funktion $y(h) = h(a^2 + h^2)^{-3/2}$, ($h \geq 0$), gibt die Beleuchtungsstärke der Lampe B im Punkt A an. In welcher Höhe h ist B zu befestigen, damit es in A möglichst hell wird? (3 Pkt.)



96. Führen Sie auf rechnerischem Wege eine Kurvendiskussion der folgenden Funktionen durch (gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereichs, Asymptoten) und fertigen Sie eine Skizze an: (je 4 Pkt.)

- (a) $f(x) = \exp\left(\frac{|x^2 - 1|}{x - 1}\right)$ (b) $f(x) = x^2 \sqrt{2 - x^2}$ (c) $f(x) = \frac{x + 1}{\ln(x + 1)}$
 (d) $f(x) = \frac{|3x + 1|}{2x + 1}$ (e) $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{(x - 4)^2}$ (f) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 5x + 6}$

(g) $f(x) = x^2 + 2 - \ln|x - 2|$ (h) $f(x) = e^x x(x - 1)$ (i) $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 2}$

97. Das Weg-Zeit-Gesetz unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes hat die Gestalt

(4 Pkt.)

$$s(t) = \frac{v_0^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_0},$$

wobei $v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ die Grenzgeschwindigkeit bezeichnet. Geben Sie eine Näherungsformel für $s(t)$ für kleine Werte von t an, indem Sie $s(t)$ in eine Taylorreihe um $t = 0$ entwickeln und alle Glieder ab der 6-ten Ordnung vernachlässigen.

98. Bei einem sphärischen Hohlspiegel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R ergibt sich für die Entfernung zwischen Brennpunkt F und Kugelmittelpunkt M :

(4 Pkt.)

$$\overline{FM} = \frac{R}{2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

mit $0 < \alpha < \pi/2$. Dabei ist α der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und dem Radius beim Einfallspunkt. Entwickeln Sie diese Funktion

- (a) in eine Reihe nach Potenzen von $\sin \alpha$ bis einschließlich zu Gliedern 4. Ordnung.
- (b) In eine Reihe nach Potenzen von α (im Bogenmaß) bis einschließlich zu Gliedern 4. Ordnung.
- (c) Welche Näherungsformel erhält man für kleine Einfallswinkel?

99. Entwickeln Sie die folgenden Ausdrücke um den Punkt $x_0 = 0$ nach Potenzen von x bis zu Gliedern 4. Ordnung:

(je 3 Pkt.)

(a) $\frac{1}{x^2 - 3}$ (b) $\sqrt{a^2 + 2x^2}$, (c) $\frac{1}{\cosh x}$ (d) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
 (e) $\frac{x}{1 + x^3}$ (f) $\sin(3x) \cos(2x)$ (g) $\sin x^2 \cos x$ (h) $\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

100. Berechnen Sie näherungsweise $\ln 1,5$ mittels der Taylorreihe für $\ln(1 + x)$. (Hinweis: Brechen Sie die Taylorreihe nach 6 Gliedern ab)

(3 Pkt.)

101. Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ derart, dass die Kurven

(3 Pkt.)

$$y_1(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{und} \quad y_2(x) = A(e^{Bx} - 1)$$

in der Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zu möglichst hohen Potenzen von x übereinstimmen!

102. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis an oder verweisen Sie auf einen Satz aus der Vorlesung und geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. Achten Sie genau auf die Voraussetzungen!)

(je 1 Pkt.)

- (a) Jede stetige Funktion besitzt auf einem Intervall ein Extremum oder einen Wendepunkt.
- (b) Jede differenzierbare Funktion hat an jeder Stelle x mit $f'(x) = 0$ ein lokales Extremum.
- (c) Jede 2-mal differenzierbare Funktion hat an jeder Stelle x mit $f''(x) = 0$ einen Wendepunkt.
- (d) Ein reelles Polynom n -ten Grades hat immer n reelle Nullstellen.
- (e) Jedes reelle Polynom vom Grad 3 hat entweder drei reelle Nullstellen oder genau zwei echt-komplexe Nullstellen.
- (f) Ist f' stetig, so ist f zweimal differenzierbar.
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist nicht konvergent.

- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
 (i) Wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 ein Minimum annimmt, so nimmt auch $g(x) = f^2(x)$ im Punkt x_0 ein Minimum an.
 (j) Wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 ihr Minimum annimmt, so ist sie in diesem Punkt auch differenzierbar.

103. Berechnen Sie zu folgenden Potenzreihen die Konvergenzradien: (je 2 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)^{n+1} x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} x^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$

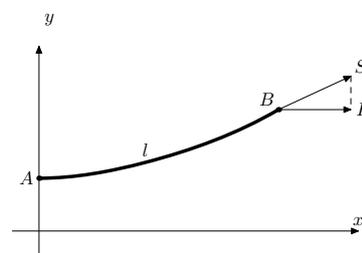
104. Lösen Sie näherungsweise mit Hilfe des Fixpunktsatzes die Gleichung $x = 1 + \tanh x$. (3 Pkt.)
 (Hinweis: Geben Sie 10 Iterationen an).

105. Bestimmen Sie genähert alle komplexen Nullstellen von $f(x) = x^3 + 2x - 1$. (3 Pkt.)

106. Bestimmen Sie genähert mit Hilfe des Newton-Verfahrens den Bereich auf der x -Achse, in dem $\sin x + x^3 + 1 > 0$ ist. (3 Pkt.)

107. Hängt ein Seil nur unter der Last seines Gewichtes G , so beschreibt es eine *Kettenlinie*:

$$y(x) = b + a \cosh\left(\frac{x+c}{a}\right), \quad a > 0.$$



Die Spannkraft S ist in jedem Punkt des Seiles tangential gerichtet, ihre Horizontalkomponente ist über die gesamte Länge L des Seiles hinweg konstant:

$$H = aG/L.$$

- (a) Man rechne nach: $y(x)$ genügt der Differentialgleichung $ay'' = \sqrt{1+y'^2}$. (3 Pkt.)
 (b) Ein Seil, 100 N/m schwer, soll zwischen den Punkten A (0 m, 100 m) und B (300 m, 192.8 m) hängen, sodass es in A horizontal einmündet (siehe Abbildung). Bestimme zunächst b und c . Stelle dann eine Gleichung für a auf und löse sie mit dem Newton-Verfahren. (4 Pkt.)
 (c) Wie groß sind die Spannkräfte in A und B ? Bestimme daraus das Gewicht G und die nötige Seillänge L . (4 Pkt.)

108. Eine zweistufige Rakete für kleine Satelliten hat die Kenndaten: (4 Pkt.)

	Leermasse	Treibstoffmasse	Verbrauch	Schubkraft F
1. Stufe	5000 kg	125000 kg	1000 kg/s	$2.45 \cdot 10^6$ N
2. Stufe	2000 kg	16000 kg	80 kg/s	$2.48 \cdot 10^5$ N

Die Rakete wird vertikal gestartet; ist der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man vereinfachend $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (unabhängig von der Höhe) für den Flug konstant, so gilt für die Beschleunigung der Rakete

$$\ddot{h}(t) = \dot{v}(t) = b(t) = \frac{F}{m(t)} - g.$$

- (a) Bestimme die Funktion $m(t)$ (= Gesamtmasse zur Zeit t).
 (b) Welche Geschwindigkeit v hat die Rakete 125 s bzw. 325 s nach dem Start?
 (c) Welche Höhe h wird nach 125 s bzw. 325 s erreicht?
 (d) Skizziere $m(t)$, $b(t)$, $v(t)$ und $h(t)$ für $0 \leq t \leq 325$ s.