



1 Integration – Teil I

1.1 Integralrechnung

- (1) Für einen Wechselstrom $J(t)$ mit der Periode T definiert man drei Mittelwerte:

(a: 3 Pkt.)
(b,c: 4 Pkt.)

$$\begin{aligned} \text{Effektivwert:} \quad J_{\text{eff}} &:= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T J^2(t) dt} \\ \text{Integralmittel:} \quad \bar{J} &:= \frac{1}{T} \int_0^T J(t) dt \\ \text{Gleichrichtwert:} \quad |\bar{J}| &:= \frac{1}{T} \int_0^T |J(t)| dt \end{aligned}$$

Berechne die drei Mittelwerte für

- (a) den sinusförmigen Strom: $J(t) = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$
 (b) den "Sägezahn"-Strom: $J(t) = \frac{4J_0}{T} \left(t + |t - \frac{3T}{4}| - |t - \frac{T}{4}| \right) - 2J_0$
 (c) den "Batterie-Ladestrom": $J(t) = \max \left\{ 0, \frac{1}{R} \left(|U_0 \sin \frac{2\pi t}{T}| - U_B \right) \right\}$ mit $U_B = 14\text{V}$, $U_0 = 20\text{V}$, $R = 0.5\Omega$ und $T^{-1} = 50 \text{ Hz}$.

- (2) Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int (2x^3 + 3 \ln x + e^{3x+1} - \cos 3x) dx & \text{(b)} \quad & \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-3}} & \text{(c)} \quad & \int \coth(\alpha x + 1) dx \\ \text{(d)} \quad & \int 2x^3 e^{-x^4} dx & \text{(e)} \quad & \int \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx & \text{(f)} \quad & \int \frac{dx}{\sqrt{10 + 6x + x^2}} \\ \text{(g)} \quad & \int (x+1)\sqrt{x+2} dx & \text{(h)} \quad & \int 2^{\sqrt{3x+2}} dx & \text{(i)} \quad & \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx \\ \text{(j)} \quad & \int 3^x \tanh(2 \cdot 3^x) dx & \text{(k)} \quad & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a - 3x^2}} \quad (a > 0) & \text{(l)} \quad & \int \frac{dx}{x \ln x} \end{aligned}$$

- (3) Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int e^{2x+1} \cos(3x-1) dx & \text{(b)} \quad & \int (2 \cos x + \cos^3 x) dx & \text{(c)} \quad & \int \arctan(2x+1) dx \\ \text{(d)} \quad & \int (x^3 + 1) \ln(\alpha x) dx & \text{(e)} \quad & \int \arcsin x dx & \text{(f)} \quad & \int \frac{x^3 - 3x}{x-2} dx \\ \text{(g)} \quad & \int \sin(3x) \cos(5x) dx & \text{(h)} \quad & \int \frac{e^{2x}}{1 - 4e^{4x}} dx & \text{(i)} \quad & \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} \end{aligned}$$

- (4) Es sei $I_m^n(x) = \int x^m (\ln x)^n dx$. Man zeige die Rekursionsformel

(4 Pkt.)

$$I_m^n = \frac{x^{m+1}}{1+m} (\ln x)^n - \frac{n}{1+m} I_m^{n-1}$$

und berechne damit $\int x^2 (\ln x)^3 dx$.

(5) Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \int 3x^2 \cos 5x \, dx & \text{(b)} \quad \int 6x^2 e^{\frac{x^3}{2}-1} \, dx & \text{(c)} \quad \int \frac{\sinh \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} \, dx \\
 \text{(d)} \quad \int \frac{dx}{3-4x^2} & \text{(e)} \quad \int \frac{\sqrt{2+x^5}}{x} \, dx & \text{(f)} \quad \int \frac{x}{\cosh^2 x^2 \cdot (2 + \tanh x^2)} \, dx \\
 \text{(g)} \quad \int \frac{3 \, dx}{\sqrt{2ax-4x^2}} & \text{(h)} \quad \int \frac{x^3-1}{x\sqrt{x^6-x^3+1}} \, dx & \text{(i)} \quad \int \sqrt{x^2+4x+5} \, dx
 \end{array}$$

(6) Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:

(je 4 Pkt.)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \int \frac{x}{2+x^3} \, dx & \text{(b)} \quad \int \frac{x^3+3}{x^4+4x^2+3} \, dx & \text{(c)} \quad \int \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1} \, dx \\
 \text{(d)} \quad \int \frac{x \, dx}{x^4+4x^2+4} & \text{(e)} \quad \int \frac{x^3-x}{x^3-3x} \, dx & \text{(f)} \quad \int \frac{x \, dx}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\
 \text{(g)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{12x-5-4x^2}} & \text{(h)} \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} & \text{(i)} \quad \int \frac{dx}{\sinh x} \\
 \text{(j)} \quad \int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + \ln x - 6)} \, dx & \text{(k)} \quad \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + 1} \, dx & \text{(l)} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x (\tan^2 x + 2 \tan x - 15)}
 \end{array}$$

(7) Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \int_0^{\pi/4} \sin^4 2x \, dx & \text{(b)} \quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cdot \cos 2x \, dx & \text{(c)} \quad \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{x^2+x+1} \\
 \text{(d)} \quad \int_{-2}^2 x^3 2^x \, dx & \text{(e)} \quad \int_1^e \cos(\ln x) \, dx & \text{(f)} \quad \int_1^{e^2} x^2 \ln x \, dx
 \end{array}$$

(8) Berechnen Sie gegebenenfalls folgende uneigentlichen Integrale:

(je 3 Pkt.)

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9} & \text{(b)} \quad \int_0^\infty e^{-x+1} \cos 2x \, dx & \text{(c)} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2e^{-x+1} + e^{x-1}} & \text{(d)} \quad \int_5^\infty \frac{t^2+t-2}{t^3+3t+2} \, dx \\
 \text{(e)} \quad \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} & \text{(f)} \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx & \text{(g)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} & \text{(h)} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx
 \end{array}$$

(9) Bestimmen Sie $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ mittels numerischer Integration.

(a) Verwenden Sie die Formeln von Newton-Cotes für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert. Führen Sie auch eine Fehlerabschätzung durch. (3 Pkt.)

(b) Verbessern Sie den Wert aus (a) für $n = 1$ (Trapez-Regel) durch Zwei- und Vierteilung des Intervalls. (3 Pkt.)

(c) Verbessern Sie die in (b) erhaltenen Werte noch durch Extrapolation. (3 Pkt.)

(10) Berechnen Sie das elliptische Integral $I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt$ (Bogenlänge der Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{2}$ und 1) mit der Trapezregel und mit Hilfe der Formel von Simpson für 2 bzw. 4 Teilintervalle, und vergleichen Sie die numerischen Werte mit der Näherungsformel $I \approx 2\pi\sqrt{3/2}$. Wie groß müsste der Abstand der Stützstellen sein, damit die Trapezsummenformel bzw. die Summenformel bei der Simpsonregel ein auf 5 Nachkommastellen genaues Ergebnis liefert? (4 Pkt.)

1.2 Bogenlänge von Kurven

- (11) Berechnen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale zwischen $t = 0$ und $t = 5$. (2 Pkt.)
- (12) Betrachten Sie die Kurve $\mathcal{C}$ in der xy -Ebene, die durch $x = \sqrt{2}t^2$ und $y = \frac{t^3}{3} - 2t$ für $t \geq 0$ gegeben ist, und berechnen Sie die Länge des geschlossenen Teils von $\mathcal{C}$. (3 Pkt.)
- (13) Berechnen Sie die Bogenlänge der hyperbolischen Spirale $r\varphi = 1$ von $\varphi_1 = 1$ bis $\varphi_2 = \sqrt{3}$. (3 Pkt.)
- (14) Berechnen Sie die Bogenlänge der Traktrix (4 Pkt.)

$$x = a \operatorname{arcosh} \left(\frac{a}{y} \right) \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

für $a > 0$ und $0 \leq y \leq a$.

- (15) Sei $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t \sin(\pi/t))$. Zeichnen Sie das Bild von w und zeigen Sie, daß die Länge der Kurve unendlich ist. (Hinweis: Zeigen Sie, daß die Länge von $w|_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} \geq \frac{2}{n+1/2}$ ist.) (4 Pkt.)
- (16) Bestimmen Sie die Bogenlänge der folgenden Raumkurven: (je 3 Pkt.)
- (a) $\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{6}t^2, 3t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \right)^T$ zwischen $A(\frac{1}{6}, 3, \frac{\sqrt{2}}{3})$ und $B(\frac{2}{3}, 6, \frac{8}{3})$.
- (b) $x^2 + y^2 = 1, z = \arccos x$ zwischen $z = 0$ und $z = \pi$ mit $y \geq 0$.
- (c) $\vec{x}(t) = (e^t, e^t \sin 2t, e^t \cos 2t)^T, 0 \leq t \leq \pi/2$.

- (17) Führen Sie für die durch (3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{4} \sin t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{4} \sin t \right)^T$$

mit $0 \leq t < 2\pi$ gegebene Kurve die Bogenlänge s als neuen Parameter ein, wobei dem Punkt $P_0(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$ die Bogenlänge $s = 0$ entsprechen soll.

1.3 Ebene - und Raumkurven

- (18) Diskutieren Sie die folgende Kurve $\mathcal{C}$ in Parameterdarstellung: (4 Pkt.)

$$x = \frac{2ct}{1+t^3} \quad y = \frac{2ct^2}{1+t^3},$$

wobei $c > 0$ ist. Zeigen Sie weiters, dass sich für $t \rightarrow -1$ die Kurve asymptotisch der Geraden $x + y = -c/2$ nähert. Geben Sie ferner eine implizite Darstellung der Kurve durch eine parameterfreie Gleichung in x und y an. (Hinweis: Betrachten Sie für die implizite Darstellung $\frac{y}{x}$.)

- (19) Skizzieren und diskutieren Sie die Kurve $4r = \sin \varphi$ und stellen Sie die Gleichung der Tangenten im Punkt $r = \frac{1}{8}, \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ auf. (3 Pkt.)
- (20) Stellen Sie die folgenden Kurven in impliziter Form dar, indem Sie den Parameter eliminieren: (a: 2 Pkt.) (b: 3 Pkt.)
- (a) $x = \frac{t-1}{t+1} \quad y = \frac{t^2+t}{t-1}$ (b) $x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad y = \frac{3t+t^2}{t+1} + \frac{2t}{1-t^2}$.
- (21) Gegeben sei die Kurve $\mathcal{C}$ mit $x = \frac{1}{2}t^2 - t$ und $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$ für $0 \leq t \leq 1$.
- (a) Finden Sie die Parameterdarstellung, so daß $\mathcal{C}$ durch die Bogenlänge parametrisiert wird. (2 Pkt.)
- (b) Berechnen Sie in Abhängigkeit der Bogenlänge den allgemeinen Tangentenvektor der Länge 1. (2 Pkt.)
- (22) Bestimmen Sie die Darstellung einer beliebigen Geraden $y = ax + b$ in Polarkoordinaten. (4 Pkt.)
- (23) Transformieren Sie die Kurve $x^4 + y^4 = x^3$ auf Polarkoordinaten, geben Sie dann eine Parametrisierung an und zeichnen Sie die Kurve. (4 Pkt.)

1.4 Fourierreihen und Gammafunktion

(24) Entwickeln Sie die Funktion

(a,b: 2 Pkt.)

(c,d: 3 Pkt.)

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (b) \quad f(x) = x^3 - x \quad \text{für } -\pi < x \leq \pi$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ |\cos x| & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad (d) \quad f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{für } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{für } |x| \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

und $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ in eine Fourierreihe.

(25) (a) Zeigen Sie die Gleichheit $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

(2 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie ein Polynom möglichst kleinen Grades, das mit der Gammafunktion an den Stellen $x = 1/2$, $x = 1$, $x = 1.5$ und $x = 3$ übereinstimmt.

(2 Pkt.)

2 Integrale 2. Teil

(26) $F(x) = \int_{-x}^{3x} (2xt^2 + 3t^3) dt$; $F'(x) = ?$

(2 Pkt.)

(27) Berechnen Sie die Flächen bzw. Volumina folgender Mengen:

$$(a) \quad F_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq e^x\}$$

(2 Pkt.)

$$(b) \quad F_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 4, \frac{1}{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

(2 Pkt.)

$$(c) \quad K_1 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{y}{x+1}\}$$

(3 Pkt.)

(28) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die von der Kurve

(2 Pkt.)

$y = \sqrt{2+x} - x$, der Geraden $x+2=0$ und der x -Achse begrenzte Fläche um die x -Achse rotiert.

(29) Bestimmen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der Astroide

(2 Pkt.)

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

um die x -Achse erzeugt wird.

(30) Welches Volumen und welche Oberfläche hat der Rotationskörper, der entsteht, wenn die durch $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ gegebene Kurve um die x -Achse rotiert?

(3 Pkt.)

(31) Wie groß ist das Volumen des Wulstes, der entsteht, wenn die vom Kreis $x^2 + (y-6)^2 = 25$ sowie den Parabeln $y = 4 - \frac{x^2}{16}$ und $y = 8 + \frac{x^2}{16}$ eingeschlossene Fläche um die x -Achse rotiert?

(3 Pkt.)

(32) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint_B f(x, y) dx dy$ für die Funktionen f und Bereiche B :

(je 2 Pkt.)

$$(a) \quad f(x, y) = 3x^2 \cos 2y + 2ye^{x+1} \text{ und } B = [-2, 3] \times [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

$$(b) \quad f(x, y) = \ln 2x \sin^3 y \text{ und } B = [\frac{1}{2}, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, 0].$$

$$(c) \quad f(x, y) = \sqrt{|y^2 - 2x|} \text{ und } B = [0, 1] \times [0, 1].$$

(33) Berechnen Sie $\int_2^3 \left(\int_a^b (x-2)^{y+2} dy \right) dx$ mit $0 < a < b$.

(3 Pkt.)

(34) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint_B f(x, y) dx dy$ für die Funktionen f und Bereiche B :

(je 3 Pkt.)

$$(a) \quad f(x, y) = 2x + y^3, \text{ und } B \text{ ist der von } y = x, y = \sqrt{2x}, x = 0 \text{ und } x = 2 \text{ begrenzte Bereich.}$$

$$(b) \quad f(x, y) = (x+1)(y-1)^2, \text{ und } B \text{ ist der von } y = -1, x = \sin \pi y \text{ und } y = (x+1)^3 \text{ begrenzte Bereich.}$$

(35) Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

(2 Pkt.)

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

(36) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$, wobei

(je 3 Pkt.)

a) B durch $x^2 + y^2 = 3z$ und $z = 3$ begrenzt wird und $f(x, y, z) = x + 2y^2$.

b) $B = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 2\}$ und $f(x, y, z) = 1$.

c) $B = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 2\}$ und $f(x, y, z) = y + 2z$.

(37) Berechnen Sie $\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ für

(je 3 Pkt.)

a) $B = \{(x, y, z) : |x + z| + |y - z| + |2x + z| \leq 1\}$ und $f(x, y, z) = x^2 + y + 2z$.

b) $B = \{(x, y, z) : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \leq 2, \quad x, y, z \geq 0\}$ und $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

(38) Gegeben sei die Pyramide, die durch die Koordinatenebenen und die Ebene $2x + 3y + 2z = 4$. Berechnen Sie das Volumen sowie den Schwerpunkt der Pyramide bei konstanter Masseverteilung $\rho \equiv 1$.

(3 Pkt.)

(39) Durch Übergang zu Polarkoordinaten ist der Flächeninhalt von $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (Lemniskate) zu berechnen.

(2 Pkt.)

(40) Berechnen Sie für $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ und $B = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ das Integral $\iint_B f(x, y) dy dx$ mit Hilfe von Polarkoordinaten.

(3 Pkt.)

(41) Wenden Sie die Variablentransformation $x = u \cos v$ und $y = u \sin v$ auf das Bereichsintegral $\iint_B f(x, y) dx dy$ für die folgenden Bereiche und Funktionen an:

(je 2 Pkt.)

a) $B = \{(x, y) : y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 2\}$, $f(x, y) = x + x^2 + y^2$,

b) $B = \{(x, y) : x \geq 0, \quad 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$, $f(x, y) = x + y$.

(42) Gesucht ist das Volumen des Bereichs über der xy -Ebene, der durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und den Zylinder $x^2 + y^2 = c^2$ begrenzt wird.

(3 Pkt.)

(43) Bestimmen Sie die drei Trägheitsmomente des Tetraeders, der durch die Koordinatenebenen und die Ebene $x + 3y + 2z = 2$ beschrieben wird, unter der Annahme der konstanten Dichte ρ .

(3 Pkt.)

(44) Bestimmen Sie mittels der Variablentransformation $u = xy$ und $v = y/x$ den Wert des Bereichsintegrals $\iint_B (x + y^2) dx dy$, wobei B der von den vier Kurven $y = 1/(3x)$, $y = 3/x$, $y = x/3$ und $y = 3x$ berandete Bereich ist.

(3 Pkt.)

(45) Bestimmen Sie mittels der Variablentransformation $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ und $v = x/y$ den Flächeninhalt der Fläche, die im 1. Quadranten ($x > 0, y > 0$) von den Kurven $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$, $x = 4y$ und $x = 25y$ begrenzt wird.

(3 Pkt.)

(46) Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den angegebenen Flächen begrenzt werden:

(je 3 Pkt.)

(a) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$

(b) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$

(c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{64}{x^2 + y^2}$

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h}$, wobei $a, b, c, h > 0$.

(e) $x - y + 2z = 3$, $x + 3y + 2z = 3$, $-x + 6y + 4z = 6$, $-x - 2y + 4z = 6$ und $z = 0$

(f) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $0 < y < 1$ und $z < 2$

(g) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $0 < y < 1$ und $z > 0$

- (h) $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$ und $z = e^{-(x^2+y^2)}$ (i) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 3x$ und $z > 0$
- (j) $|x| + |y| = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$ und $z = \cos x \cos y$

(47) Berechnen Sie das Potential

(4 Pkt.)

$$G \int \int \int_K \frac{\rho}{r} dx dy dz$$

einer homogenen Kugelschale auf einen innerhalb liegenden Punkt P , wobei r den Abstand des Punktes P zum laufenden Raumelement bezeichnet ($\rho, G = \text{const}$). Berechnen Sie analog dazu das Potential auf einen festen Punkt außerhalb einer Vollkugel.

(48) Berechnen Sie mittels der Substitution $x = u$, $y = v$ und $x + y + z = w$ das Dreifachintegral

(3 Pkt.)

$$\int \int \int_B x^{10} y^9 z^8 \sqrt{x+y+z} dx dy dz$$

über den Bereich $B = \{(x, y, z) : x, y, z > 0, x + y + z < 1\}$.

3 Funktionen in mehreren Variablen

(49) Untersuchen Sie, an welchen Stellen folgende Funktionen stetig sind, wobei stets $f(0, 0) = 0$ gilt:

(je 2 Pkt.)

- (a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$
- (c) $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{x+y}$ (d) $f(x, y) = \frac{x^3 \cos y^2}{x^4 + y^4}$

(50) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^4 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ definiert.

(3 Pkt.)

- (a) Ist $f(x, y)$ in $(0, 0)$ stetig?
- (b) Ist $f(x, y)$ in $(0, 0)$ partiell differenzierbar?

(51) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y (x^2 - y^2)}{x^4 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ definiert.

(4 Pkt.)

- (a) Zeigen Sie, daß f stetig ist.
- (b) Berechnen Sie f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} in $(0, 0)$.

(52) Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

(3 Pkt.)

$$F(x, y, z) = y \cos \frac{x}{z}$$

mit $x = 2u + 3v^2$; $y = 3u^2 + v$; $z = -u^3 - 2 \ln v$ gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

(53) Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = F(u, v)$ und $u = r \cos \varphi$; $v = r \sin \varphi$ (Polarkoordinaten).

(3 Pkt.)

Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2$ gilt.

(54) Zeigen Sie am Beispiel der Schraublinie $\varphi(t) = (t, \sin t, \cos t)^T$, dass der Mittelwertsatz der Differentialrechnung im allgemeinen nicht gilt, und dass er in diesem Beispiel sogar niemals für zwei verschiedene Parameterwerte richtig ist.

(4 Pkt.)

(55) Berechnen Sie die Punkte, in denen der Gradient von $f(x, y, z) = \ln(xy + \frac{y}{3}) - \frac{1}{5}x^2 + 2 \ln z^2$ gleich $(2, \frac{1}{4}, 1)$ ist.

(2 Pkt.)

(56) Gesucht ist die Richtungsableitung von $f(x, y, z) = 2x^2 y z^2 + 2x y^2 z^3 - 3x^2 y^2 z$ in Richtung von $(2, -1, -2)^T$ sowie $(1, -1, 1)^T$ im Punkt $(1, -2, -3)$.

(2 Pkt.)

- (57) Bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs der Fläche $z = 2x^{y-1}$ im Punkt $(1, 2, 2)$. (2 Pkt.)
- (58) Berechnen Sie Tangentialebene und Normale der Flächen $z = f(x, y)$ mit: (je 3 Pkt.)
- (a) $f(x, y) = 2x^3 - \ln(1 + y^2)$
 (b) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy^2 - \cos(xy + 2) - x$
 (c) $f(x, y) = e^{xy+2x}(\cos 2y - \log_7 x)$
- (59) Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = 2x^3 - 3y^2 + x \ln x$ im Punkt $(1, 1, -1)$. (2 Pkt.)
- (60) Skizzieren Sie die folgenden Flächen: (je 3 Pkt.)
- (a) $z = \cos(x + y)$ (b) $z = x^2 - 2y^2 + 1$. (c) $z = \sqrt{2 - x^2}$ (d) $z^2 - x^2 + y^2 = 1$
- (61) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = 2xy^3 - 5x^2y + x$ definiert. (je 2 Pkt.)
- (a) Zeigen Sie: f ist total differenzierbar.
 (b) Bestimmen Sie für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von f .
 (c) Geben Sie die Taylorformel 2.Ordnung für $x = 1$ und $y = 2$ an.
 (d) Berechnen Sie $f(3.05, 2.92)$ mit Hilfe der linearen Approximation durch das totale Differential und bestimmen Sie den daraus resultierenden Fehler im Vergleich zum exakten Funktionswert.
- (62) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = x_2^3 e^{\frac{x_1^2}{x_1-2}}$ definiert. Berechnen Sie das totale Differential df . (3 Pkt.)
- (63) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2) = (2x_2 \cosh(2x_1 + 1), 3x_1x_2 \cos x_1, x_1^2x_2 - \sinh x_1)$. Bestimmen Sie (3 Pkt.)
- (a) die Menge U , auf der f stetig differenzierbar ist.
 (b) das Differential von f auf U .
- (64) Wie in Aufgabe 63 mit $f(x_1, x_2) = (|x_1 + e^{x_2}|, x_1x_2, |x_1 + x_2|)$. (3 Pkt.)
- (65) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = 2\|x\|^4x$. (3 Pkt.)
- (a) Berechnen Sie das totale Differential df ,
 (b) und df_{x_0} mit $x_0 = (2, -1, 1)$.
- (66) Berechnen Sie zu f und g die Jacobimatrix von $g \circ f$, wobei (3 Pkt.)
- $$f(x, y) = (\ln(x) + y), x \ln(y), x^2y) \quad , \quad g(x, y, z) = (x^2 + y, x - yz, x + 2y^2z).$$
- (67) Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $h(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ mit (3 Pkt.)
- $$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 2x_1x_2 \sin x_1 \\ f_2(x_1, x_2) &= 3x_2 \ln(x_1^2 + 1) \\ g(y_1, y_2) &= (y_1 + y_2)^2 - y_1 \end{aligned}$$
- Bestimmen Sie die Menge U , auf der h total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential dh auf U .
- (68) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f(x, y) = u(xy^2, x^2y, xy + 1)$ nach der Kettenregel für (je 3 Pkt.)
- (a) $u(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1 - 2x_2 + x_3)$
 (b) $u(x_1, x_2, x_3) = \ln(2x_1 + x_2 - x_3)$

(c) $u(x_1, x_2, x_3) = \sinh(x_1 + x_2) + x_1 \cos(x_2 x_3)$.

Für welche dieser Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$?

- (69) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach x und y der folgenden Funktionen: (je 3 Pkt.)

(a) $u = u(\xi, \eta)$, wobei $\xi = x - y$ und $\eta = 2x + y$.

(b) $u = u(\xi, \eta)$, wobei $\xi = x - y^2$ und $\eta = xy + 1$.

- (70) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden implizit gegebenen Funktionen $z = z(x, y)$: (je 3 Pkt.)

(a) $xz^x - xye^z + \cos(x - y + 2z) = 2$

(b) $\cos x^2 \sin z^3 + x^2 y z^2 - 3xz + xe^{xy+2z} + x^2 y + 3 = 0$.

- (71) Seien $f(x, y) = x^{2y-1}$ sowie $g(x, y) = 2^x y^x$. Berechnen Sie näherungsweise $f(1.1, 2.05)$ und $g(0.95, 2.1)$ durch Annäherung an die Tangentialebene im Punkt $(1, 2)$. Schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der partiellen Ableitungen ab. (3 Pkt.)

- (72) Zeigen Sie, daß das folgende Gleichungssystem lösbar ist, und lösen Sie näherungsweise mit Hilfe des Newtonverfahrens mit Startpunkt $(-1, 0)$: (3 Pkt.)

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 + \frac{5x_2}{2x_1} + 1 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

(Hinweis: Führen Sie 3 Iterationen durch.)

- (73) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei ferner (4 Pkt.)

$$F(r, \varphi, \vartheta) = f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta).$$

Berechnen Sie $F_r, F_\varphi, F_\vartheta$ ausgedrückt durch f_x, f_y, f_z , sowie f_x, f_y, f_z ausgedrückt durch $F_r, F_\varphi, F_\vartheta$.

- (74) (a) Entwickeln Sie $f(x, y) = x\sqrt{x+3y}$ in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $(1, 3)$ (3 Pkt.)
Hinweis: Glieder ab der dritten Ordnung können vernachlässigt werden.

- (b) Wie groß ist der Fehler im Punkt $(1.5, 2.5)$ zwischen dem exakten Wert $f(x, y)$ und dem aus (a) erhaltenen Näherungswert? (2 Pkt.)

- (75) Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = xy - 2x^2y + 3y$ nach Potenzen von $x - 1$ und $y + 2$. (3 Pkt.)

- (76) Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = \sin(x^2y - 2xy + 2x)$ nach Potenzen von $x - 1$ und $y + 1$ bis zur dritten Ordnung. (3 Pkt.)

- (77) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix H_f der Funktion $f(x, y) = 2^x y + \cos(2xy)$. Ist H_f in den Punkten $(1, 1)$, $(-3, 1)$, $(-2, -1)$ und $(0, 0)$ positiv definit (negativ definit bzw. indefinit)? (3 Pkt.)

- (78) Geben Sie die Extremwerte der Funktion f und deren Typen an, wobei (je 3 Pkt.)
 (a) $f(x, y) = 6x^2 + 2xy^3 + y^2 + 1$ (b) $f(x, y) = x^2y(x - y - 1)$

- (79) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (je 3 Pkt.)

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2 + 2x + 3y - 5$

(b) $f(x, y) = y^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y - 1$

- (80) Bestimmen Sie den größten Wert der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(x, y) := \sin x + \sin y - \sin(x + y)$, in dem von der x -Achse, der y -Achse und der Geraden $x + y = 2\pi$ begrenzten Dreieck. (3 Pkt.)

- (81) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $w : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $w(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{4}{z} - 1$, unter der Nebenbedingung $x + y + z = 1$. (4 Pkt.)

- (82) Bestimmen Sie die Punkte kürzesten Abstands vom Nullpunkt zur Kurve $x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2 = 4$. (3 Pkt.)
- (83) Berechnen Sie die Stellen lokaler Extrema von $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 4z$ unter den Nebenbedingungen $x + y = 2$ und $yz = 4$. (4 Pkt.)
- (84) Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 8y + 2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 2$ durch Parametrisieren der Nebenbedingung. (3 Pkt.)
- (85) Geben Sie die Extrema von z auf der Fläche $3x^2 - 3y^2 + z^2 - 3xy - 2xz = 4$ an. (3 Pkt.)
- (86) Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen unter den gegebenen Nebenbedingungen mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators: (je 2 Pkt.)
- (a) $f(x, y) = x - 3y - xy$ unter der Nebenbedingung $x + y = 6$,
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$ unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 1$,
- (c) $f(x, y) = x + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - 2y = 0$.
- (87) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $x + y = 1$ mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren. (3 Pkt.)
- (88) Berechnen Sie $\text{rot}(\text{rot } v)$ für $v = (xy^2 + z, 3xy, x + yz)$ und $v = (\sin x + z, 3^x y, x + y - z)$. (3 Pkt.)
- (89) Berechnen Sie $\text{div}(\text{rot } v)$ sowie $\text{rot}(\text{rot } v)$ für $v = (x^3 yz, xy^3 z, xyz^3)$. (3 Pkt.)
- (90) Wie sieht die Laplace-Gleichung $\Delta f(x, y, z) = 0$ aus, wenn f in Zylinderkoordinaten (4 Pkt.)

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

gegeben ist?

- (91) In welchen Punkten lässt sich die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch (3 Pkt.)

$$f(u, v, \varphi) = (u \sinh v \cos \varphi, u \sinh v \sin \varphi, u \cosh v)$$

umkehren?

- (92) Für welche $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ besitzt die Funktion (3 Pkt.)

$$f(w, x, y, z) = \begin{pmatrix} w + y \\ x + z^2 \\ w + z \\ x + y^2 \end{pmatrix}$$

eine lokale Umkehrfunktion?

4 Differentialgleichungen

- (93) Gesucht ist das Richtungsfeld der expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung (2 Pkt.)

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Vergleichen Sie das Richtungsfeld mit den Lösungskurven.

- (94) Lösen Sie (je 2 Pkt.)

(a) $y' = \frac{\sin 2x \cos y}{\tan y}$ (b) $y' = \frac{y^2 + y - 1}{e^{3x-1}}$.

- (95) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben: (je 2 Pkt.)

(a) $y' = ye^{2x}$, $y(1) = 2$

(b) $y' = \frac{\sin^2 x}{\sin y}$, $y(\pi) = \frac{\pi}{4}$

(96) Bestimmen Sie alle Lösungen von $x^2 y' - 2y^2 = 0$ mit $y(1) = 1$ bzw. $y(-1) = \frac{1}{2}$. (2 Pkt.)

(97) Lösen Sie $\frac{y'\sqrt{2+x^3}}{x^2 y^3} = 2$, $y(1) = 2$. (2 Pkt.)

(98) Lösen Sie $y' = \frac{x^2(y^2-1)}{y(x^3+1)}$. (2 Pkt.)

(99) Lösen Sie $y' = \frac{y^2-3xy}{x^2}$, $y(1) = -2$. (3 Pkt.)

(100) Gesucht ist diejenige Lösung von $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$ ($x \neq 0$), die durch $(1, 2)$ verläuft, wobei diese Differentialgleichung eine spezielle Lösung der Form $y_1 = \frac{a}{x}$ besitzt. (3 Pkt.)

(101) Ermitteln Sie diejenigen Kurven, die die folgende geometrische Bedingung erfüllen: (je 3 Pkt.)

a) Die Subtangente (=Projektion des Tangentenabschnitts zwischen Berührungspunkt und x -Achse auf dieselbe) ist für jeden Punkt gleich 1.

b) Die Subnormale (analog definiert) ist für jeden Punkt gleich 1.

(102) Vier Fliegen sitzen in den Ecken einer quadratischen Schachtel und beginnen zum selben Zeitpunkt mit konstanter Geschwindigkeit immer genau auf die Fliege zu ihrer Rechten loszugehen. Ermitteln Sie den Weg und die Länge des Weges bis zum gemeinsamen Treffpunkt im Mittelpunkt des Quadrates. (4 Pkt.)

(103) Ist $y' = 5|y|^{\frac{4}{5}}$ überall eindeutig lösbar? (3 Pkt.)

(104) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und zeichnen Sie einige Lösungskurven: (je 3 Pkt.)

(a) $y' + \frac{y}{4} = \frac{1-2x}{4}y^5$ (b) $y' = y^2 + (1-2x)y + (2-2x)$

(c) $x^2 y' = x^2 y^2 - xy + 1$ (d) $y' = -x(\operatorname{sgn} y)\sqrt{|y|}$

(e) $y' + y^2 - 2x^2 y + x^4 - 2x - 1 = 0$

(105) Lösen Sie, sofern exakte Differentialgleichungen vorliegen: (je 2 Pkt.)

(a) $(2x + \frac{1}{y})dy + 2y dx = 0$ (b) $(\sin x \tan y + 1)dx + \frac{\cos x}{\cos^2 y}dy = 0$

(c) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$ (d) $(2 + y)dx + (1 + 2x)dy = 0$

(e) $-\frac{1}{y}\sin \frac{x}{y}dx + \frac{x}{y^2}\sin \frac{x}{y}dy = 0$ (f) $dx = \frac{y}{1-x^2 y^2}dx + \frac{x}{1-x^2 y^2}dy$

(g) $\frac{y}{1-x^2 y^2}dx + \frac{x}{1-x^2 y^2}dy = 0$

(106) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit integrierendem Faktor: (je 3 Pkt.)

(a) $(4x^2 - y^2)dy - 6xy dx = 0$ (b) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

(c) $x dy + y dx + 3x^3 y^4 dy = 0$

(107) Gesucht ist diejenige Lösung von $y' = \frac{xy}{x^2 - y^4}$, ($x, y \neq 0$), die durch den Punkt $(1, 1)$ verläuft. (3 Pkt.)

(108) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen: (je 3 Pkt.)

(a) $y = xy' + y^2$

(b) $(y^2 - 3xy - 2x^2) dx = (x^2 - xy) dy$

(c) $y = xy' + \frac{a}{y}$

(d) $(xe^y + y - x^2) dy = (2xy - e^y - x) dx$

(109) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben:

(je 3 Pkt.)

(a) $(1 + 2x^2)y' + 4xy = 6x^3, y(1) = 1$

(b) $y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$

(c) $y''' - 2y'' + y' = x, y(1) = y'(1) = 1, y''(1) = 0$

(110) Für welche reellen Parameter p hat die Differentialgleichung

(3 Pkt.)

$$y''(x) - 2y(x) + py(x) = 0$$

Polynome (in x) als Lösungen? Lösen Sie für den Fall $k = 10$ das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

(111) Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

(a,b: je 2 Pkt.,

(a) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(b) $2y'' + y' + 2y = 0$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x^2 + 2x)e^{-x}$

(d) $y'' - 3y' = 18x + 3$

(c-r: je 3 Pkt.)

(e) $y'' - 2y' + 10y = 25x^2 + 3$

(f) $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$

(g) $y'' + 9y = 2 \sin x$

(h) $y'' + 9y = \tan 3x$

(i) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x$

(j) $y'' - 3y' - 10y = 9e^{-5x}$

(k) $y'' - 3y' + 2y = 4 \sin 2x - 8 \cos 2x$

(l) $y'' + 2y' - 3y = 26xe^x$

(m) $x^2y'' - 5xy' + 12y = 0$

(n) $x^2y'' + 5xy' + 20y = 0$

(o) $x^3y''' + xy' - y = x^2 \ln x - 23x$

(p) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

(q) $y'' + y = \frac{2}{\cos x}$

(r) $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$

(112) Verwenden Sie unbestimmte Ansätze zur Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(je 3 Pkt.)

(a) $y'' - y' + 2y = xe^x + 2 \sin x + \cos x$

(b) $y'' + 4y = 2x^2 + \cos x$

(c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = e^{-2x}$

(d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

(113) Gesucht ist die allgemeine Lösung von $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x} \cos 4x$.

(je 3 Pkt.)

(114) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = -8(e^{-2x} - \sin 2x)$ an.

(je 3 Pkt.)

5 Systeme von Differentialgleichungen

(115) Welche der folgenden Funktionsmengen

(je 2 Pkt.)

(a) $\{e^{-x}, x^2 + 2x + 2\}$

(b) $\{e^{-x}, e^x - x^2 - 2x - 2\}$

(c) $\{e^{-x}, 5e^{-x}\}$

bilden ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $(2 + x)y'' + xy' - 2y = 0$?

(116) Welche der folgenden Funktionsmengen

(je 2 Pkt.)

(a) $\{1, x, e^{-2x}\}$ (b) $\{x^2, e^{-2x}\}$ (c) $\{1, x, x + e^{-2x}\}$ (d) $\{1, x, xe^{-2x}\}$

bilden ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y''' + 2y'' = 0$?

(117) Beweisen Sie die Äquivalenz der Differentialgleichung

(2 Pkt.)

$$(3 + 2t)x''(t) + 2tx'(t) - tx(t) = 0$$

für $x'(t) = y(t)$, mit dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ (3 + 2t)y'(t) &= tx(t) - 2ty(t) \end{aligned}$$

für $(x(t), y(t))$.

(118) Beweisen Sie: Alle reellwertigen Lösungen $(x(t), y(t))$ des Systems

(3 Pkt.)

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ (4 - 2t)y'(t) &= x(t) - ty(t) \end{aligned}$$

sind von der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t/2} \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

(119) Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

(4 Pkt.)

$$y''(x) \sin^2 x - y'(x) \sin 2x + y(x) (1 + \cos^2 x) = e^x \sin^3 x.$$

- (a) Verwenden Sie die Lösung $y_1(x) = \sin x$ um mittels *Variation der Konstanten* (VdK) ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung zu bestimmen.
- (b) Aus diesem Fundamentalsystem ist mittels (VdK) eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung herzuleiten.

(120) Bestimmen Sie sämtliche homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten, die in $\mathbb{R}$ die folgenden Lösungen besitzen:

(je 2 Pkt.)

(a) $\{e^{-3x}, e^{2x}\}$ (b) $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$ (c) $e^{-x} \cos 2x$

(121) Bestimmen Sie sämtliche homogenen linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten, die in $\mathbb{R}$ die folgenden Lösungen besitzen:

(je 2 Pkt.)

(a) $\{1, e^x, xe^x\}$ (b) $\{e^{2x} \sin 3x, e^{-x}\}$ (c) $\{e^x, \cos x\}$

(122) Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen mittels *Elimination*.

(3 Pkt.)

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= y(t) \\ \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) &= 2x(t) \end{aligned}$$

(123) Bestimmen Sie aus dem folgenden System eine (einzelne) Differentialgleichung 3. Ordnung für $x(t)$.

(3 Pkt.)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x^2 y \\ \dot{y} &= x + 2y^2 \end{aligned}$$

- (124) Bestimmen Sie aus dem folgenden System eine (einzelne) Differentialgleichung 4. Ordnung für $x(t)$.

(3 Pkt.)

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{x} + \dot{y} &= x \\ \ddot{y} - \dot{x} - 2\dot{y} &= y\end{aligned}$$

- (125) Lösen Sie das folgende System durch *Elimination* von $y(t)$.

(3 Pkt.)

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= y \\ \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y &= -8\dot{x} - 4x\end{aligned}$$

- (126) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(t)$ der Differentialgleichungssysteme $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ für die folgenden konstanten Matrizen $\mathbf{A}$:

(a) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(a-c: je 2 Pkt.)

(d) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ (h) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (i) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d-i: je 3 Pkt.)

(j) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (k) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (l) $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(j-l: je 4 Pkt.)

- (127) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Systeme, sowie die Lösungen der zugehörigen Anfangswertprobleme:

(je 4 Pkt.)

(a) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y + 2e^t & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= 4x + 3y - e^t & y(0) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y + 1 & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= y - 2x - 3 & y(0) &= 1\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y - e^t \\ \dot{y} &= 2x + y \cos t \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 0\end{aligned}$ (d) $\begin{aligned}\dot{x} &= x + 4y - t^2 + 6t & x(0) &= 2 \\ \dot{y} &= x + y - t^2 + t - 1 & y(0) &= 1\end{aligned}$

(e) $\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - e^t & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= y - x - e^t & y(0) &= 0 \\ \dot{z} &= x + 3z + te^{2t} & z(0) &= 1\end{aligned}$ (f) $\begin{aligned}\dot{x} &= y + \psi(t)e^t & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= 6x + y + \psi(t)e^t & y(0) &= 0\end{aligned}$

für beliebige differenzierbare Funktionen ψ .

$$\begin{array}{ll}
 \text{(g)} & \begin{array}{ll} \dot{x} = 2x - 4y + 3 & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 1x - 2y - 2 & y(0) = y_0 \end{array} & \text{(h)} & \begin{array}{ll} \dot{x} = -2x + y - z & x(0) = 0 \\ \dot{y} = x - y + z + t & y(0) = 0 \\ \dot{z} = x + y - z + 2e^t & z(0) = 0 \end{array}
 \end{array}$$

mittels Variation der Konstanten.

(128) Lösen Sie das folgende System mittels Elimination:

(4 Pkt.)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y + 4p^2 \\
 \dot{y} &= 2py - p^2x, \quad p \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(129) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems mittels Variation der Konstanten:

(4 Pkt.)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t) + e^t - te^{4t} & x(0) &= 1 \\
 \dot{y}(t) &= 2x(t) + 3y(t) - e^t + 2te^{4t} & y(0) &= 0
 \end{aligned}$$

(130) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ansatzmethode alle reellwertigen Lösungen des Systems:

(4 Pkt.)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= 2x - y + 2e^t & x(0) &= 0 \\
 \dot{y} &= 4x + 2y - 10te^t & y(0) &= 0
 \end{aligned}$$

(131) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ansatzmethode die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Systeme:

(je 4 Pkt.)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \begin{array}{l} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = -2x - y + e^t \end{array} & \text{(b)} & \begin{array}{l} \dot{x} = 2x + 5y + e^{-2t} \\ \dot{y} = 4x + 3y + e^{-2t} \end{array} & \text{(c)} & \begin{array}{l} \dot{x} = x - 2y + t \\ \dot{y} = 2x + y - e^t \end{array}
 \end{array}$$

(132) Bestimmen Sie eine Lösung des folgenden Systems in Abhängigkeit des reellen Parameters p :

(4 Pkt.)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= 2x - py \\
 \dot{y} &= px + 2y - e^{2t} \sin(pt)
 \end{aligned}$$

(133) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

(4 Pkt.)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x + 2y + e^t + t + 1 & x(0) &= 1 \\
 \dot{y} &= 3x - 4y + 2e^t - 2t & y(0) &= 1
 \end{aligned}$$

(134) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Systeme:

(je 4 Pkt.)

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \begin{array}{l} \dot{x} = 4x - y + \cos t \\ \dot{y} = -x + 4y + \cos t - \sin t \end{array} & \text{(b)} & \begin{array}{l} \dot{x} = 3x + 2y + t^2 + 5 \\ \dot{y} = x + 2y - t^2 + 4t - 1 \end{array}
 \end{array}$$

6 Partielle Differentialgleichungen

(135) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ der eindimensionalen Wellengleichung

(je 4 Pkt.)

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + \varphi(x, t)$$

im Streifen $0 \leq x \leq L, 0 \leq t$ mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = r(t), \quad u(L, t) = s(t)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(t)$$

für

	c	L	$\varphi(x, t)$	$r(t)$	$s(t)$	$f(x)$	$g(x)$
(a)	1	π	0	0	0	$\sin x \cos x$	0
(b)	2	π	0	0	0	$x(\pi - x)$	$\sin 3x$
(c)	1	2π	0	0	0	$\pi - \pi - x $	0
(d)	3	4	$\sin \pi x \sin 3\pi t$	0	0	0	0
(e)	3	4	$\sin \pi x \sin \frac{\pi t}{4}$	0	0	$1 - \cos \frac{\pi x}{2} $	0
(f)	1	2	$(2 - x)xt$	0	0	$\sin 3\pi x$	$\sin \pi x$

(136) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, y, t)$ der zweidimensionalen Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ im Quadrat

(4 Pkt.)

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$$

mit den Randbedingungen

$$u(x, y, t) = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial Q$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x, y, 0) = (x^2 - 1)(y^2 - 1), \quad u_t(x, y, 0) = 0.$$

(137) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, y, t)$ der zweidimensionalen Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ im Einheitskreis

(4 Pkt.)

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

mit den Randbedingungen

$$u(x, y, t) = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial K$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x, y, 0) = 1 - x^2 - y^2, \quad u_t(x, y, 0) = 0.$$

(138) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen, mittels **verallgemeinerter Potenzreihenentwicklung** um $x_0 = 0$.

(je 4 Pkt.)

(a) $xy'' + 2y' + xy = 0$

(b) $4x^2y'' - 8x^2y' + (1 + 4x^2)y = 0$

(c) $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$

(d) $2x(5 - 2x)y'' + (4x^2 - 15)y' + 5(3 - 2x)y = 0$

(e) $2xy'' - (3 + 4x)y' + (3 + 2x)y = 0$

(f) $x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$