

Folie zur Vorlesung “Mathematik A”

26. Januar 2012

Nachtrag zur Differenzierbarkeit:

Bemerkung: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß die links-/rechtsseitigen Limiten der Ableitungen

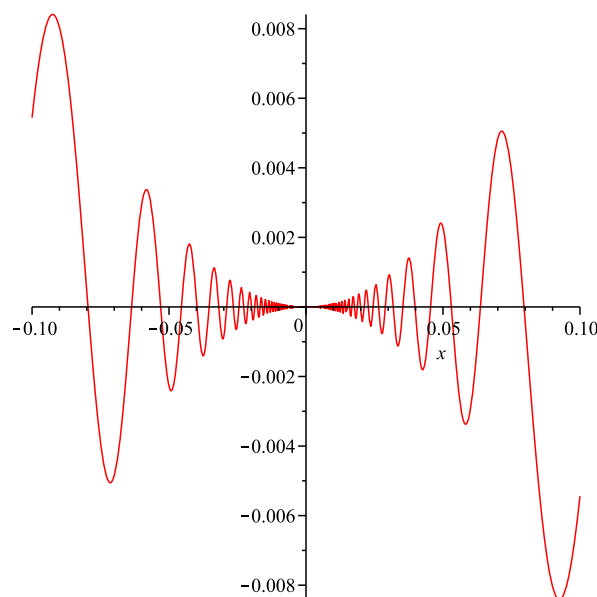
$$f'(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x) \quad \text{und} \quad f'(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f'(x)$$

existieren. Es gilt: Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = x_0$ genau dann differenzierbar, falls $f'(x_0-) = f'(x_0+)$.

Achtung: Falls einer der Limiten $f'(x_0-)$ bzw. $f'(x_0+)$ nicht existiert, so kann keine Aussage über die Differenzierbarkeit getroffen werden!

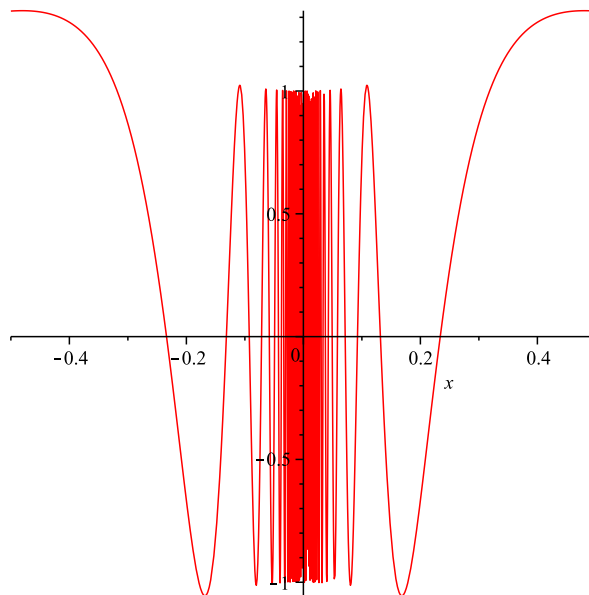
Beispiel: Man betrachte

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$



Wie bereits gesehen ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und es ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$



Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar! Allerdings existieren die links- bzw. rechtsseitige Ableitung bei 0 nicht, da der Limes $\lim_{x \rightarrow x_0+} \cos \frac{1}{x}$ nicht existiert! Die Ableitung ist also an der Stelle $x = 0$ unstetig!

Zu Reihen von Funktionen:

Satz von Weierstraß:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen ($n \in \mathbb{N}$). Falls es reelle Zahlen $M_n \geq 0$ gibt mit

$$\forall x \in I : |f_n(x)| \leq M_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

so konvergiert die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **gleichmäßig** auf I .

Beweis:

1. Die Grenzfunktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist wohldefiniert für jedes $x \in I$, denn für jedes $x \in I$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Somit konvergiert für jedes $x \in I$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **absolut**. Daher ist $f(x)$ sinnvoll definiert.

2. Gleichmäßige Konvergenz: sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$. Solch ein N_ε lässt sich finden, da $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Somit gilt für jedes $m \geq N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |f(x) - s_m(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also unterscheidet sich die m -te Partialsumme $s_m(x)$ um höchstens ε von $f(x)$, wenn $m \geq N_\varepsilon$. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **gleichmäßig**.

□

Beispiel: Sei $I = [0, 1]$ und $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$. Somit

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} = M_n$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$, konvergiert die Reihe der Funktionen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

gleichmässig auf $[0, 1]$.

Satz:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von stetigen Funktionen ($n \in \mathbb{N}$), so daß $f_n(x)$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion $f(x)$ **stetig**.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f_n(x)$ gleichmässig gegen $f(x)$ konvergiert, existiert ein N_ε , so daß sich $f_{N_\varepsilon}(x)$ und $f(x)$ um höchstens ε unterscheiden für jedes $x \in I$, d.h.

$$|f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da jede Funktion $f_{N_\varepsilon}(x)$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Daraus folgt: falls $|x - y| < \delta$, dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x) + f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(y) + f_{N_\varepsilon}(y) - f(y)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(y)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{N_\varepsilon}(y) - f(y)|}_{< \varepsilon/3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit unterscheiden sich $f(x)$ und $f(y)$ um beliebig kleines ε , wenn nur y nahe genug bei x liegt. D.h. $f(x)$ ist stetig!

□

Satz von Cauchy-Hadamard:

Sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ gegeben. Der Konvergenzradius ist dann

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty],$$

wobei $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt wird.

Beweis:

1. Wir bilden die Quotienten der Summanden:

$$\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums können wir nun entscheiden, wo der Übergang von Konvergenz zur Divergenz stattfindet, nämlich genau dort, wo der obige Quotient gleich 1 wird, d.h. für Konvergenz muß gelten

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{|x-x_0|}_{\leq R} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

bzw. nach dem Konvergenzradius R aufgelöst:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

2. Mit Hilfe des Wurzelkriteriums können wir auch entscheiden, wo der Übergang von Konvergenz zur Divergenz stattfindet, nämlich genau dort, wo $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ gleich 1 wird, d.h. für Konvergenz muß gelten

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \underbrace{|x-x_0|}_{\leq R} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

bzw. nach dem Konvergenzradius R aufgelöst:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□

Weitere Beispiele:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, denn:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Für $x = 1$ ist die n -te Partialsumme

$$s_n(x) = 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = n,$$

d.h. die Folge der Partialsumme divergiert und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ divergent für $x = 1$. Für $x = -1$ ist die n -te Partialsumme

$$s_n(x) = -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

d.h. die Folge der Partialsumme divergiert und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ divergent für $x = -1$. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, denn:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Für $x = 1$ ist die n -te Partialsumme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

d.h. die Folge der Partialsumme divergiert, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ divergent für $x = 1$. Für $x = -1$ ist die gegebene Potenzreihe die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n,$$

welche aufgrund des Leibniz-Kriteriums konvergiert. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ für alle $x \in [-1, 1)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, denn:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^2}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} \cdot \sqrt[n]{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Für $x = 1$ wird die Potenzreihe zur konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Für $x = -1$ ist die gegebene Potenzreihe absolut konvergent, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus:

Aufgabe: Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \ln(1+x)$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung:

1. Berechnung der zu f gehörigen Taylorreihe: Dazu benötigen wir alle Ableitungen. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \text{ und } f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{n-1}$$

Wir beweisen die Behauptung für die n -te Ableitung durch Induktion nach n : für $n = 1$ ist die obige Formel erfüllt ($n = 1$ einsetzen!). Wir nehmen nun an, daß die n -te Ableitung gegeben ist durch $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{n-1}$. Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \cdot (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{(1+x)^n} \right)' \\ &= (n-1)! \cdot (-1)^{n-1} \frac{-n \cdot (1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = n! \cdot (-1)^n \frac{1}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, daß die Formel für die n -te Ableitung tatsächlich gelten.

Somit ist

$$f^{(n)}(0) = (n-1)! \cdot (-1)^{n-1}.$$

Es ist $f(0) = \ln 1 = 0$. Somit ist die zu f gehörige Taylorreihe gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{f,0}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! (-1)^{n-1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

2. Konvergenzradius der Taylorreihe: Mit $a_n = (-1)^{n-1}/n$ erhalten wir

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. Ist die Taylorreihe an den Randpunkten konvergent?

- (a) Für $x = 1$ ist die Taylorreihe genau die alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Somit konvergiert $T_{f,0}(x)$ für $x = 1$.

- (b) Für $x = -1$ ist die Taylorreihe die harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Somit divergiert $T_{f,0}(x)$ für $x = -1$.

4. Gilt $T_{f,0}(x) = \ln(1+x)$?

$$\begin{aligned} T'_{f,0}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} = (\ln(1+x))' = f'(x) \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: zwei Funktionen, welche dieselbe Ableitung besitzen, stimmen bis auf eine additive Konstante überein, d.h. es existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$T_{f,0}(x) - f(x) = C \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Durch Einsetzen von $x = 0$ erhalten wir

$$C = T_{f,0}(0) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{0^n}{n} - \ln(1+0) = 0 - 0 = 0.$$

Da sowohl $T_{f,0}(x)$ als auch $f(x)$ stetig sind bei $x = 1$ gilt somit

$$T_{f,0}(x) = \ln(1+x) \text{ für alle } x \in (-1, 1].$$

Bemerkung: Wir erhalten daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = T_{f,0}(1) = f(1) = \ln(1+1) = \ln 2.$$