

Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

13. März 2012

Zur Linearität von Integralen:

Satz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und $c \cdot f$ integrierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b c \cdot f(x) dx &= c \cdot \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Beweis:

1. $f + g$ ist integrierbar:

Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir definieren:

$$\begin{aligned}m_f^{(k)} &:= \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \\ m_g^{(k)} &:= \inf\{g(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \\ m_{f+g}^{(k)} &:= \inf\{\underbrace{f(x)}_{\geq m_f^{(k)}} + \underbrace{g(x)}_{\geq m_g^{(k)}} \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \geq m_f^{(k)} + m_g^{(k)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}U(f, Z) + U(g, Z) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot m_f^{(k)} + \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot m_g^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot (m_f^{(k)} + m_g^{(k)}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot m_{f+g}^{(k)} = U(f + g, Z).\end{aligned}$$

Analog:

$$O(f + g, Z) \leq O(f, Z) + O(g, Z).$$

Nach dem Riemann'schen Integrabilitätskriterium existiert nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von $[a, b]$ mit

$$O(f, Z_\varepsilon) - U(f, Z_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad O(g, Z_\varepsilon) - U(g, Z_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& O(f+g, Z_\varepsilon) - U(f+g, Z_\varepsilon) \\
& \leq O(f, Z_\varepsilon) + O(g, Z_\varepsilon) - (U(f, Z_\varepsilon) + U(g, Z_\varepsilon)) \\
& = \underbrace{(O(f, Z_\varepsilon) - U(f, Z_\varepsilon))}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{(O(g, Z_\varepsilon) - U(g, Z_\varepsilon))}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist auch $f+g$ nach dem Riemann'schen Integrabilitätskriterium integrierbar.

2. $c \cdot f$ ist integrierbar:

Wir behandeln nur den Fall $c > 0$. (Der Fall $c < 0$ läuft analog, allerdings mit kleinen Abänderungen bei Infima und Suprema.) Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit

$$O(f, Z) - U(f, Z) \leq \frac{\varepsilon}{c}.$$

Seien

$$\begin{aligned}
M_k &= \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \\
m_k &= \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
O(c \cdot f, Z) - U(c \cdot f, Z) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot c \cdot M_k - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot c \cdot m_k \\
&= c \cdot \left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot M_k - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot m_k \right) \\
&= c \cdot (O(f, Z) - U(f, Z)) \leq c \cdot \frac{\varepsilon}{c} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist also auch $c \cdot f$ nach dem Riemann'schen Integrabilitätskriterium integrierbar.

③ Zur Linearität des bestimmten Integrals

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen

Haben bereits gesehen: Dann ist $f+g$ auch integrierbar in $[a, b]$

Noch zu zeigen: $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Zur Erinnerung: Es gilt für jede Zerlegung z von $[a, b]$:

$$u(f, z) + u(g, z) \leq u(f+g, z)$$

$$\& \sigma(f, z) + \sigma(g, z) \geq \sigma(f+g, z)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Da f, g integrierbar, existiert eine Zerlegung z' von $[a, b]$ mit

$$\sigma(f, z') - u(f, z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\& \sigma(g, z') - u(g, z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun: 1)
$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - \int_a^b (f+g)(x) dx \\ & \leq \underbrace{\sigma(f, z')}_{\leq} + \underbrace{\sigma(g, z')}_{\leq} - \underbrace{u(f+g, z')}_{\geq} \\ & \leq \sigma(f, z') + \sigma(g, z') - u(f, z') - u(g, z') \\ & = \underbrace{(\sigma(f, z') - u(f, z'))}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{(\sigma(g, z') - u(g, z'))}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - \int_a^b (f+g)(x) dx \\ & \geq u(f, z') + u(g, z') - \sigma(f+g, z') \\ & \geq u(f, z') + u(g, z') - \sigma(f, z') - \sigma(g, z') \\ & = \underbrace{-(\sigma(f, z') - u(f, z'))}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} - \underbrace{(\sigma(g, z') - u(g, z'))}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} > -\varepsilon \end{aligned}$$

Also:
$$\left| \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - \int_a^b (f+g)(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{für jedes beliebig kleines } \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f+g)(x) dx$$