Folie zur Vorlesung “Mathematik B”
15. März 2016

Zur Substitution mittels Umkehrfunktion:

Man betrachte

$$\int_{x_u}^{x_o} g(x)\,dx.$$

Wir machen nun die Substitution $x = f(y)$. Daraus folgt

$$\frac{dx}{dy} = f'(y), \qquad \text{bzw.} \qquad dx = f'(y)\,dy.$$

Die neuen Grenzen werden wie folgt bestimmt: finde y_u und y_o mit

$$x_u = f(y_u) \qquad \text{und} \qquad x_o = f(y_o).$$

Somit erhalten wir:

$$\int_{x_u}^{x_o} g(x)\,dx = \int_{y_u}^{y_o} g\big(f(y)\big) f'(y)\,dy.$$

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Wir machen die Substitution $x = \cos(y)$ und erhalten: $\frac{dx}{dy} = -\sin(y)$ bzw. $dx = -\sin(y)\,dy$, sowie $y_o = 0$, da $\cos(0) = 1 = x_o$, und $y_u = \pi/2$, da $\cos(\pi/2) = 0 = x_u$. Somit

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi/2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\cos(y)^2}} \big(-\sin(y)\big)\,dy = \int_0^{\pi/2} 1\,dy = y\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Zur quadratischen Ergänzung:

Falls im Integranden ein Term der Form $\sqrt{x^2+\beta x+\gamma}$ auftritt, so hilft womöglich quadratische Ergänzung:

$$\sqrt{x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{x^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \frac{\beta^2}{4} + \gamma - \frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\big(x+\beta/2\big)^2 + \big(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\big)}.$$

Wir schreiben $A := \gamma - \frac{\beta^2}{4}$.

Falls $A \geq 0$, so ergibt sich:

$$\sqrt{x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{\Big(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{A}}\Big)^2 + 1}.$$

In diesem Fall wäre eine mögliche geeignete Substitution

$$\frac{x+\beta/2}{\sqrt{A}} = \sinh(y),$$

um die Gleichung $1+\sinh(y)^2 = \cosh(y)^2$ auszunutzen.

Falls $A < 0$, so ergibt sich:

$$\sqrt{x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{-A}\cdot\sqrt{\Big(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{-A}}\Big)^2 - 1}.$$

In diesem Fall wäre eine mögliche geeignete Substitution

$$\frac{x+\beta/2}{\sqrt{-A}} = \cosh(y),$$

um die Gleichung $\sinh(y)^2 = \cosh(y)^2 - 1$ auszunutzen.

Falls im Integranden ein Term der Form $\sqrt{\gamma - x^2 - \beta x}$ auftritt, so hilft womöglich diese quadratische Ergänzung:

$$\sqrt{\gamma - x^2 - \beta x} = \sqrt{\gamma + \frac{\beta^2}{4} - \Big(x^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \frac{\beta^2}{4}\Big)} = \sqrt{\Big(\gamma + \frac{\beta^2}{4}\Big) - \Big(x+\beta/2\Big)^2}.$$

Falls $B = \gamma + \frac{\beta^2}{4} \geq 0$, so ergibt dies weiter

$$\sqrt{\gamma - x^2 - \beta x} = \sqrt{B}\sqrt{1 - (\frac{x+\beta/2}{\sqrt{B}})^2}$$

In diesem Fall wäre eine mögliche geeignete Substitution

$$\frac{x+\beta/2}{\sqrt{B}} = \sin(y) \quad \text{oder} \quad \frac{x+\beta/2}{\sqrt{B}} = \cos(y)$$

um die Gleichung $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$ auszunutzen.