# Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
# 15. März 2016

**Rekursive Formeln:**

Man berechne für $n \in \mathbb{N}$

$$\int \cos(x)^n \, dx$$

Wir haben bereits gesehen:

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c, \qquad \int \cos(x)^2 \, dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + c.$$

Sei nun $n \geq 3$: zunächst ist

$$\int \cos(x)^n \, dx = \int \underbrace{\cos(x)^{n-1}}_{=:f} \underbrace{\cos(x)}_{=:g'} \, dx$$

Mittels partieller Integration durch

$$f = \cos(x)^{n-1}, \; g' = \cos(x) \implies f' = -(n-1)\cos(x)^{n-2}(-\sin(x)), \; g = \sin(x)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int \cos(x)^n \, dx}_{=:I} &= \cos(x)^{n-1}\sin(x) + \int (n-1)\cos(x)^{n-2} \underbrace{\sin(x)^2}_{=1-\cos(x)^2} \, dx \\
&= \cos(x)^{n-1}\sin(x) + (n-1)\int \cos(x)^{n-2} - \cos(x)^n \, dx \\
&= \cos(x)^{n-1}\sin(x) + (n-1)\int \cos(x)^{n-2} \, dx - (n-1)\underbrace{\int \cos(x)^n \, dx}_{=I}.
\end{aligned}$$

Umstellen der Gleichung nach $\int \cos(x)^n \, dx$ ergibt:

$$n\int \cos(x)^n \, dx = \cos(x)^{n-1}\sin(x) + (n-1)\int \cos(x)^{n-2} \, dx,$$

bzw. äquivalent

$$\int \cos(x)^n \, dx = \frac{1}{n}\cos(x)^{n-1}\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2} \, dx,$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x) \, dx &= -\cos(x) + c \\
\int \sin(x)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + c \\
\int \sin(x)^n \, dx &= -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2} \, dx \quad \text{für } n \geq 3.
\end{aligned}$$