Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
16. März 2016

Berechnung von Typ-4-Brüchen:

Seien $B, C, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Man berechne das Integral

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx \quad \text{ mit } \beta^2 - 4\gamma < 0,$$

d.h. das Polynom $x^2 + \beta x + \gamma$ besitzt keine reellen Nullstellen. Wir berechnen das gesuchte Integral in 5 Schritten:

1. Berechne

$$\int \frac{y}{(y^2 + 1)^k} dy.$$

Wir verwenden folgende Substitution:

$$w = y^2 + 1 \quad \Longrightarrow \frac{dw}{dy} = 2y \quad \Longrightarrow dy = \frac{dw}{2y}.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(y^2 + 1)^k} dy &= \int \frac{y}{w^k} \frac{dw}{2y} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w^k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-k + 1} \frac{1}{w^{k-1}} + c \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

2. Man bestimme eine rekursive Formel für das Integral
$$\mathcal{I}_k(y) := \int \frac{dy}{(y^2+1)^k}.$$
Für $k = 1$:
$$\mathcal{I}_1(y) = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan(y) + c.$$
Sei nun $k \geq 2$:
$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k(y) &= \int \frac{dy}{(y^2+1)^k} = \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^k} dy \\
&= \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k} dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k} dy \\
&= \underbrace{\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy}_{=\mathcal{I}_{k-1}(y)} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k} dy = \ldots
\end{aligned}$$
Wir wenden partielle Integration auf das zweite Integral an mit
$$f(y) = y, g'(y) = \frac{y}{(y^2+1)^k} \quad \Longrightarrow f'(y) = 1, g(y) = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}.$$
Es ergibt sich also:
$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k(y) &= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \int \underbrace{y}_{=f(y)} \cdot \underbrace{\frac{y}{(y^2+1)^k}}_{=g'(y)} dy \\
&= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \left[-\frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \int -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy \right] \\
&= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \left[-\frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \underbrace{\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy}_{=\mathcal{I}_{k-1}(y)} \right] \\
&= \frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}\mathcal{I}_{k-1}(y).
\end{aligned}$$

3. Man berechne

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}.$$

Aus $\beta^2 - 4\gamma < 0$ folgt $\gamma - \beta^2/4 > 0$. Wir setzen $\alpha := \sqrt{\gamma - \beta^2/4}$. Nun verwenden wir quadratische Ergänzung:

$$x^2+\beta x+\gamma = \Big(x+\frac{\beta}{2}\Big)^2 + \underbrace{\Big(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\Big)}_{=:\alpha^2>0} = \alpha^2\Big[\Big(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\Big)^2+1\Big].$$

Daher ist

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \int \frac{dx}{\alpha^{2k}\Big[\big(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\big)^2+1\Big]^k}.$$

Wir substituieren wie folgt:

$$y = \frac{x+\beta/2}{\alpha} \quad \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} \quad \Longrightarrow dx = \alpha\, dy.$$

Also:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} &= \int \frac{1}{\alpha^{2k}(y^2+1)^k}\alpha dy = \frac{1}{\alpha^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}dy \\ &= \frac{1}{\alpha^{2k-1}}\mathcal{I}_k(y) = \frac{1}{\alpha^{2k-1}}\mathcal{I}_k\Big(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\Big).\end{aligned}$$

4. Man berechne

$$\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx.$$

Wir machen folgende Substitution:

$$y = x^2+\beta x+\gamma \quad \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x+\beta \quad \Longrightarrow dx = \frac{dy}{2x+\beta}.$$

Also:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx &= \int \frac{2x+\beta}{y^k}\frac{dy}{2x+\beta} = \int \frac{dy}{y^k} \\ &= \frac{1}{-k+1}\frac{1}{y^{k-1}} + c = \frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + c.\end{aligned}$$

5. Wir schreiben den zu integrierenden Bruch wie folgt um:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \frac{B}{2}\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + \Big(C - \frac{B\beta}{2}\Big)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

Also erhalten wir aus 5. mit Hilfe von 3. und 4. folgende Formel:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx$$

$$= \frac{B}{2}\frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + \Big(C - \frac{B\beta}{2}\Big)\frac{1}{\alpha^{2k-1}}\mathcal{I}_k\Big(\frac{x+\beta/2}{\alpha}\Big).$$