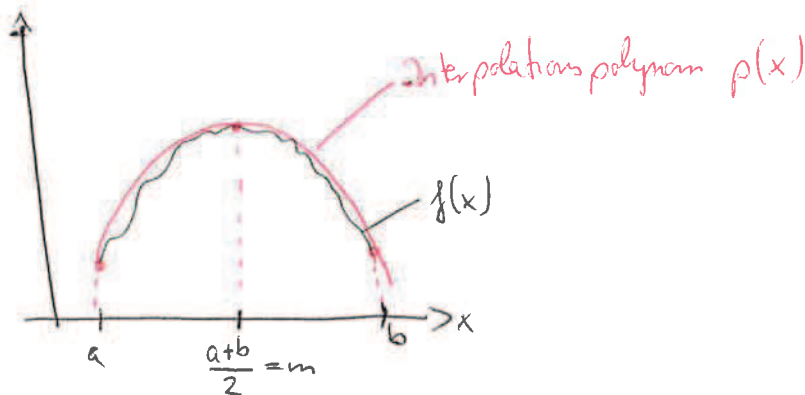


2) Interpolation durch Polynom vom Grad 2



Erinnerung: Lagrange-Interpolation an Stützstellen

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hier: $n=3$

x_i	$x_0 = a$	$x_1 = m$	$x_2 = b$
$f(x_i)$	$f(a)$	$f(m)$	$f(b)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\rightarrow p(x) = f(a) \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m) \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b) \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = f(a) \underbrace{\int_a^b \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} dx}_{(1)} + f(m) \underbrace{\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} dx}_{(2)} + f(b) \underbrace{\int_a^b \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)} dx}_{(3)}$$

$$(1) = \int_a^b \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} dx = \int_0^2 \frac{\frac{b-a}{2}(s-1) \cdot \frac{b-a}{2}(s-2)}{\left(-\frac{b-a}{2}\right) \cdot (-b-a)} \cdot \frac{b-a}{2} ds = \dots$$

Subst: $x = a + \frac{b-a}{2}s \rightarrow m = a + \frac{b-a}{2}$ & $b = a + \frac{b-a}{2} \cdot 2$
 $\rightarrow dx = \frac{b-a}{2} ds$

Neue Grenzen: $a = a + \frac{b-a}{2}s \rightarrow s=0$
 $b = a + \frac{b-a}{2}s \rightarrow s=2$

$$\dots = \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{2} \frac{b-a}{2} ds = \frac{b-a}{4} \int_0^2 (s-1)(s-2) ds = \frac{b-a}{4} \int_0^2 s^2 - 3s + 2 ds$$

$$= \frac{b-a}{4} \left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2 + 2s \right]_0^2 = \frac{b-a}{4} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{b-a}{4} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{b-a}{6}}}$$

Analog: ② = $\int_0^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} dx = \frac{4}{3} \frac{b-a}{2}$

③ = $\int_0^2 \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)} dx = \frac{b-a}{6}$

→ Simpsonregel: $\int_a^b f(x) dx \approx f(a) \cdot \frac{b-a}{6} + f(m) \frac{4}{3} \frac{b-a}{2} + f(b) \frac{b-a}{6}$
 $= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f(m) + \frac{1}{3} f(b) \right)$

Beispiel: $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = ?$

→ $f(x) = e^{-x^2}$



Trapezregel: $\frac{1 - (-1)}{2} (f(1) + f(-1)) = \underline{0,7357}$

Trapezsumme: • 2 Teilintervalle: $([-1, 0], [0, 1])$:

$\frac{1 - (-1)}{2} \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(0) + \frac{1}{2} f(1) \right) = \underline{1,3679}$

• 4 Teilintervalle: $([-1, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1])$

$\frac{1 - (-1)}{2} \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f(1) \right) = \underline{1,4627}$

Simpsonregel: $\frac{1 - (-1)}{2} \left(\frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) \right) = \underline{1,5786}$

Exakt: $\underline{\underline{1,4936}}$

Bemerkung: Es ist auch möglich, das Intervall $[a, b]$ zu unterteilen und auf jedem Teilintervall getrennt die Simpsonregel anzuwenden!

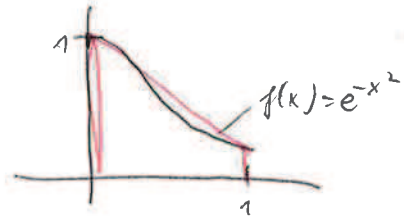
Aber: Immer vorher überlegen, ob dies Sinn macht!

Fehlerabschätzungen

- 1) Trapezregel: Fehler maximal $\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\xi)$ für ein $\xi \in [a,b]$
- 2) Simpsonregel: Fehler $\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$ für ein $\xi \in [a,b]$

Der Fehler ist also höchstens so groß wie die maximalen Werte der Ableitungen (mit die Konstanten) im Intervall $[a,b]$.

Beispiel: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$



Trapezregel: $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1-0}{2} (f(1) + f(0)) = \underline{0,6839}$

Fehlerabschätzung: Fehler $\leq \frac{1}{12} (b-a)^3 \cdot \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$

hier: $f(x) = e^{-x^2}$

$$\rightarrow f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$\rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (4x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f'''(x) &= -2x e^{-x^2} (4x^2 - 2) + e^{-x^2} (8x) \\ &= e^{-x^2} (-8x^3 + 12x) = e^{-x^2} \cdot x (12 - 8x^2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pm \sqrt{\frac{12}{8}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max \{ |f''(0)|, |f''(1)| \} = \max \{ 2, 2e^{-1} \} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Also Fehler} \leq \frac{1}{12} (1-0)^3 \cdot 2 = \frac{1}{6} \approx \underline{0,167}$$