Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
19. April 2016

Orthogonalitätsrelationen:

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \begin{cases} \pi, & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{falls } m = n = 0 \\ 0, & \text{falls } m \neq n. \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx &= \begin{cases} \pi, & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx &= 0 \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Wir beweisen exemplarisch die erste Gleichung; die restlichen Gleichungen sind völlig analog zu beweisen. Zur Erinnerung: Das Additionstheorem liefert folgende Gleichung:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\big] \\
= {}&\frac{1}{2}\big[\cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big] \\
= {}&\frac{1}{2}\big[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big] \\
= {}&\frac{1}{2}\big[\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\big] = \cos\alpha\cos(\beta).
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit $\alpha = mx$ und $\beta = nx$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)\Big]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((m-n)x\big)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((m+n)x\big)\,dx
\end{aligned}$$

Falls nun $m \neq n$ gilt, d.h. $m - n \neq 0$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx \\
= {}&\frac{1}{2(m-n)}\sin\big((m-n)x\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)}\sin\big((m+n)x\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Im Fall $m = n = 0$ erhalten wir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

Im Fall $m = n \neq 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)\,dx \\ &= \pi + \frac{1}{2}\frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Fourierreihen:

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt 2π-periodisch, falls

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Ziel: Zerlegung einer 2π-periodischen Funktion $f(x)$ in einzelne Cosinus- und Sinus-Schwingungen.

Eine **Fourierreihe** besitzt folgende Form:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \geq 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

mit $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$, so daß die Reihe konvergiert. Die *k-te Partialsumme* ist gegeben durch

$$s_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Wir **nehmen an**, daß $s_k(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Wie bereits gesehen gilt dann für $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} s_k(x)\cos(mx) &\xrightarrow{k\to\infty} f(x)\cos(mx) \quad \text{gleichmäßig!} \\ s_k(x)\sin(mx) &\xrightarrow{k\to\infty} f(x)\sin(mx) \quad \text{gleichmäßig!} \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_a^b s_k(x)\cos(mx)\,dx &= \int_a^b f(x)\cos(mx)\,dx \quad \text{und} \\ \lim_{k\to\infty} \int_a^b s_k(x)\sin(mx)\,dx &= \int_a^b f(x)\sin(mx)\,dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $m \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \\
=\ & \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\cos(mx)\,dx \\
=\ & \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\cos(mx) + \sum_{n=1}^{k}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)\cos(mx)\,dx \\
=\ & \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\cos(mx)}_{=\begin{cases}\frac{1}{2}a_0\sin(mx)|_{-\pi}^{\pi}=0, & \text{falls } m>0\\ \pi a_0, & \text{falls } m=0\end{cases}} + \\
& + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\Big[a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx}_{=\begin{cases}\pi, & \text{falls } m=n\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}} + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx}_{=0\ \text{Orthogonalitätsrelationen!}}\Big] \\
=\ & \begin{cases}\pi a_0, & \text{falls } m=0,\\ \pi a_m, & \text{falls } m>0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $m \geq 0$:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx. \tag{1}$$

Analog für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \\
=\ & \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_k(x)\sin(mx)\,dx \\
=\ & \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\sin(mx) + \sum_{n=1}^{k}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)\sin(mx)\,dx \\
=\ & \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\sin(mx)}_{-\frac{1}{2}a_0\cos(mx)|_{-\pi}^{\pi}=0} + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\Big[a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx}_{=0\ \text{Orthogonalitätsrelationen!}} + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx}_{=\begin{cases}\pi, & \text{falls } m=n\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}}\Big] \\
=\ & \pi a_m
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $m \geq 1$:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx. \tag{2}$$

<u>Bemerkungen:</u>

1. Falls $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Denn:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos(mx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx \end{aligned}$$

   Wir verwenden die Substitution $x = -y$, d.h. $dx = -dy$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \underbrace{-f(-y)}_{=f(y)} \underbrace{\cos(-my)}_{=\cos(my)}\, dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(y) \cos(my)\, dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(y) \cos(my)\, dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx = 0 \end{aligned}$$

2. Falls $f(x)$ eine gerade Funktion ist, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, siehe Übungen!

Nun die **Umkehrung:**

Sei jetzt eine <u>beliebige</u> 2π-periodische Funktion $f(x)$ gegeben. Berechne die Koeffizienten a_n und b_n mit Hilfe obiger Formeln (1) und (2) und bezeichne die zu f gehörige Fourierreihe mit

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \geq 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \big).$$

<u>Frage:</u> Gilt $f(x) = \bar{f}(x)$???

Eine Antwort liefert der folgende Satz:

Satz: Sei f eine 2π-periodische Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Im Intervall $[0, 2\pi]$ besitze f nur endlich viele Punkte x, an denen f nicht stetig oder nicht differenzierbar ist.
2. In allen anderen Punkten sei f' gleichfalls stetig.
3. An den "Ausnahmepunkten" (also an den Punkten x, wo f nicht stetig bzw. nicht differenzierbar ist) existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$ sowie die Ableitungen $f'(x+)$ und $f'(x-)$.

Dann konvergiert die zu f gehörige Fourierreihe in jedem Punkt x gegen die Funktion

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Falls f in x stetig ist (d.h. $f(x+) = f(x-)$), dann gilt sogar $\bar{f}(x) = f(x)$.
Ist f überall stetig, dann konvergiert die Fourierreihe $\bar{f}$ gleichmässig gegen f und es gilt $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle x.