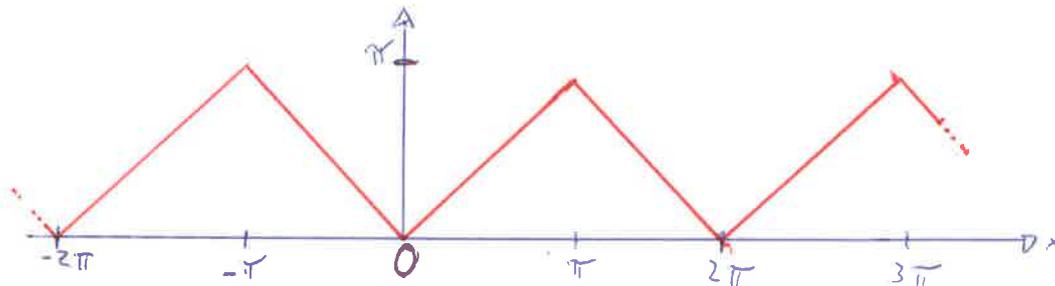


Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiele zu Fourierreihen:

Beispiel 1: Man betrachte die Funktion $f(x) = |x|$ im Intervall $[-\pi, \pi)$, welche 2π -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt wird. Berechne die zu f gehörige Fourierreihe \bar{f} .



1. Bestimmung der Koeffizienten a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $x \cos(nx)$ für $n \geq 1$ mit Hilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=f} \underbrace{\cos(nx)}_{=g'} dx &= x \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) - \int \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\ &= \frac{x}{n} \sin(nx) - \frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n} \cos(nx) + c \\ &= \frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) + c. \end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2} \cos(-n\pi) \right] + \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= -\frac{2}{n^2\pi} + \frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem:

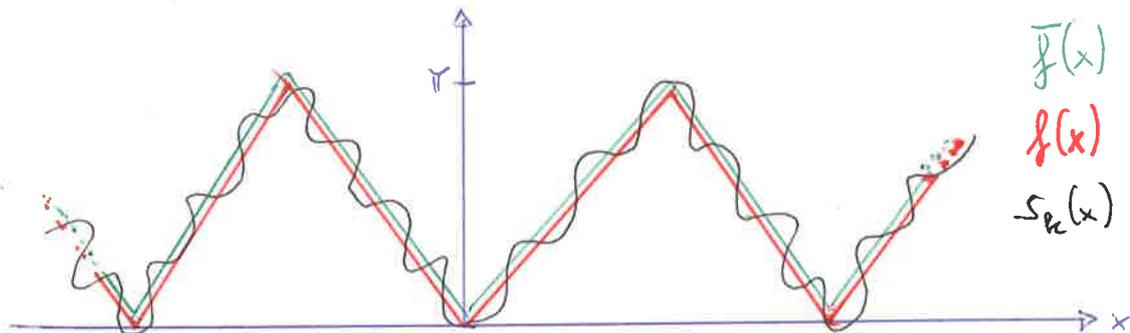
$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \int_{-\pi}^0 -x dx + \int_0^{\pi} x dx = -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{\pi} = 0 - \frac{-(-\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} - 0 = \pi^2.$$

2. Da $f(x)$ eine gerade Funktion ist (d.h. $f(x) = f(-x)$), gilt $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$.
3. Die zu f gehörige Fourierreihe \bar{f} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{m \geq 1} \frac{-4}{(2m-1)^2 \pi} \cos((2m-1)x). \end{aligned}$$

4. **Zusatzfrage:** Gilt $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Antwort: JA, da f auf ganz \mathbb{R} stetig ist, insbesondere stetig an den Stellen $-\pi$ und π .

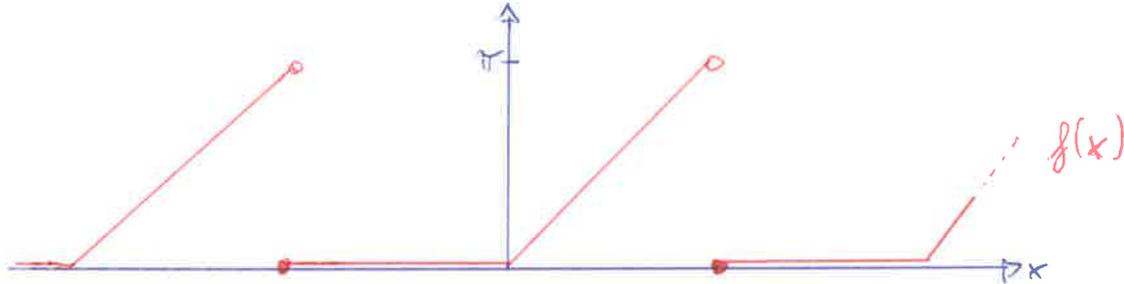


$$S_k(x) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx)$$

Beispiel 2: Man betrachte die im Intervall $[-\pi, \pi)$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [-\pi, 0] \\ x, & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases},$$

welche zu einer auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion 2π periodisch fortgesetzt wird.



Berechne die zu f gehörige Fourierreihe \bar{f} und überprüfe für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\bar{f}(x) = f(x)$ gilt.

1. Bestimmung der Koeffizienten a_n :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{2}{n^2\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Bestimmung der Koeffizienten b_n , $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Wir berechnen eine Stammfunktion zu $x \sin(nx)$, $n \geq 1$, mit Hilfe von

partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=f} \underbrace{\sin(nx)}_{=g'} dx &= x \cdot \frac{-1}{n} \cos(nx) - \int \frac{-1}{n} \cos(nx) dx \\ &= \frac{-x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) + c \\ &= \frac{-x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) + c. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^\pi \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\pi}{n} \cos(n\pi) + 0 - 0 - 0 \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Die zu f gehörige Fourierreihe \bar{f} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{m \geq 1} \frac{-2}{(2m-1)^2 \pi} \cos((2m-1)x) + \frac{1}{2m-1} \sin((2m-1)x) \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} -\frac{1}{2k} \sin(2kx). \end{aligned}$$

4. Gilt $\bar{f}(x) = f(x)$?

Antwort: f ist nur stetig an den Stellen $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, d.h. nur dort gilt $\bar{f}(x) = f(x)$. An den Sprungstellen von f nimmt \bar{f} den Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert von f an. Es gilt:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, k \text{ ungerade} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

