Folie zur Vorlesung “Mathematik B”
03. Mai 2016

Beispiele: Man überprüfe folgende Funktionen an der Stelle $(0,0)$ auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit sowie Existenz der Richtungsableitungen

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   - Stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
     Man betrachte
     $$\lim_{c\to 0} f(c,c) = \lim_{c\to 0} \frac{c^2}{c^2+c^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$
     d.h. f ist **NICHT** stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.
   - Existieren partielle Ableitungen an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
     Man betrachte:
     $$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\cdot(1,0)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{t^2+0^2}}{t} = 0.$$
     Ebenso:
     $$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\cdot(0,1)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{0^2+t^2}}{t} = 0.$$
     Somit existieren alle partiellen Ableitungen an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.
   - Existieren weitere Richtungsableitungen an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
     Sei $\vec{v} = (a,b)$ eine Richtung mit $1 = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$ und $a,b \neq 0$. Wir erhalten:
     $$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\cdot(a,b)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2ab}{t^2a^2+t^2b^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{ab}{a^2+b^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ab}{t} = \pm\infty, \end{aligned}$$
     d.h. andere Richtungsableitungen (ausgenommen in Richtung der Koordinatenachsen) existieren **NICHT**!

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
  Man betrachte
  $$\lim_{c\to 0} f(c^2, c) = \lim_{c\to 0} \frac{c^4}{c^4 + c^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$
  d.h. f ist **NICHT** stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.
- Existieren Richtungsableitungen an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
  Sei $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$ eine Richtung mit $1 = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Wir erhalten:
  $$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\cdot(a,b)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3ab^2}{t^2a^2+t^4b^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ab^2}{a^2+t^2b^4} = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}, \end{aligned}$$
  falls $a \neq 0$. Im Fall $a = 0$ muß gelten $b = 1$, d.h. $\vec{v} = (0,1)$. Es gilt dann:
  $$\begin{aligned} \partial_{(0,1)} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\cdot(0,1)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{0}{0^2+t^4}}{t} = 0. \end{aligned}$$
  Somit existieren alle Richtungsableitungen. Insbesondere ist $f(x,y)$ partiell differenzierter.

3.

$$f(x,y) = |x+y|$$

- Stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$?
  Man betrachte
  $$0 \leq f(x,y) = |x+y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 = f(0,0),$$
  d.h. $f(x,y)$ ist stetig an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.
- $f(x,y)$ ist nicht partiell differenzierbar nach x:
  Man betrachte
  $$\frac{f\big((0,0) + t(1,0)\big) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = \frac{|t|}{t},$$
  d.h. der Limes für $t \to 0$ existiert nicht, da $\lim_{t\to 0-} \frac{|t|}{t} = -1$ und $\lim_{t\to 0+} \frac{|t|}{t} = 1$. Somit ist $f(x,y)$ nicht partiell differenzierbar bzgl. x.