Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
04. Mai 2016

Newton-Verfahren zum Lösen von nicht-linearen Gleichungssystemen:

Zur Erinnerung: 1-dimensionaler Fall:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein (fast) beliebiger Startwert. Man definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dann gilt: Ist $f'(x^*) \neq 0$, wobei x^* eine Lösung von $f(x) = 0$ ist, so konvergiert x_n gegen x^*, falls der Startwert "nahe" genug bei x^* liegt.

Jetzt: 2-dimensionaler Fall:

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig (partiell) differenzierbare Funktionen.

Gesucht: Lösung (x^*, y^*) von

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Vorgehensweise zur näherungsweisen Bestimmung einer Lösung:

Man beginne mit einem **Startwert** (x_0, y_0), welcher "in der Nähe" der Lösung (x^*, y^*) liegt. (Dies kann i.A. eine schwierige Aufgabe sein, solch einen geeigneten Startwert zu finden; mittels geometrischer Überlegungen kann man eine geeignete Wahl "nahe" von (x^*, y^*) bestimmen).

Da f und g stetig differenzierbar sind, sind f und g insbesondere *total differenzierbar*, d.h. man kann f approximieren durch die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

Analog für $g(x, y)$:

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem $f(x,y)=0, g(x,y)=0$ ersetzt man nun durch das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0), \\ 0 &= g(x_0,y_0)+g_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+g_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \end{aligned}$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach x und y ergibt mit Hilfe der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = x_0 - \frac{f(x_0,y_0)g_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)g(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)g_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)g_x(x_0,y_0)}, \\ y &= y_1 = y_0 - \frac{f_x(x_0,y_0)g(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)g_x(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)g_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)g_x(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis (x_1,y_1) wird nun als neuer Startwert benutzt, und daraus (x_2,y_2) berechnet, daraus $(x_3,y_3),(x_4,y_4),\ldots$.

Definiere

$$D(x,y) := \det\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = f_x(x,y)g_y(x,y)-f_y(x,y)g_x(x,y).$$

Man beachte, daß der Nenner in den Lösungen (x_1,y_1) gleich $D(x_0,y_0)$ ist.

Es gilt nun: Ist $D(x^*,y^*)\neq 0$, wobei (x^*,y^*) eine Lösung zu $f(x,y)=g(x,y)=0$ ist, so konvergiert (x_n,y_n) gegen (x^*,y^*), falls der Startwert (x_0,y_0) "nahe" genug bei (x^*,y^*) liegt

Beispiel: Man berechne näherungsweise eine Lösung zu

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3y+2\sin(x)-1=0, \\ g(x,y) &= xy^2+\sin(x)-1.5=0. \end{aligned}$$

Wir wählen den Startpunkt $(x_0,y_0)=(1,1)$, und erhalten iteriert folgende Werte:

i	x_i	y_i
0	1	1
1	0.543203	1.18107
2	0.441758	1.53469
3	0.4460	1.5481
4	0.44598	1.54796

Nach 4 Schritten kann hier die Berechnung abgebrochen werden, da sich die Werte (x_i,y_i) kaum mehr unterscheiden, d.h. wir erhalten approximativ

$$(x^*,y^*)\approx(0.44598, 1.54796).$$