

Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

8. Mai 2013

Taylorformel 2. Ordnung:

Zur Erinnerung: 1-dimensionaler Fall:

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Entwicklungspunkt und h eine “Störvariable”. Dann liefert die Taylorformel folgende Gleichung:

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + \frac{h^2}{2}g''(x_0) + \frac{h^3}{3!}g'''(x_0 + \delta h) \quad (1)$$

für ein geeignetes $\delta \in (0, 1)$.

Jetzt: Mehrdimensionaler Fall:

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig (partiell) differenzierbare Funktion, d.h. alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnungen existieren und sind stetig. Sei $\vec{x}_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Entwicklungspunkt, und sei $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ ein “Störvektor” mit $\|\vec{h}\|$ “sehr nahe” bei 0. Ziel ist es, die Funktion f in der Nähe von $\vec{x}_0$ zu entwickeln.

Wir definieren folgende Funktion:

$$g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) = f(\underbrace{x_0^{(1)} + th_1}_{=:x_1(t)}, \dots, \underbrace{x_0^{(n)} + th_n}_{=:x_n(t)})$$

Wir wenden nun die Taylorformel aus dem 1-dimensionalen Fall (1) an mit $x_0 = 0$ und $h = t$:

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + \frac{t^3}{6}g'''(\delta t). \quad (2)$$

Mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \frac{\partial}{\partial t}[x_i(t)] = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot h_i,$$

und somit

$$g'(0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{x}_0) \cdot h_i$$

Nochmalige Anwendung der Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}
 g''(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot h_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} [x_j(t)] \cdot h_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot h_j \cdot h_i,
 \end{aligned}$$

und somit

$$g''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) \cdot h_j \cdot h_i.$$

Analog:

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{x_i x_j x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k,$$

und somit

$$g'''(\delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{x_i x_j x_k}(\vec{x}_0 + \delta\vec{h}) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k.$$

Für $t = 1$ erhalten wir aus (2) somit:

$$\begin{aligned}
 g(1) &= f(x_0^{(1)} + h_1, \dots, x_0^{(n)} + h_n) \\
 &= g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{6}g'''(\delta) \\
 &= f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) + \left[\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{x}_0) \cdot h_i \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) \cdot h_j \cdot h_i \right] + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{x_i x_j x_k}(\vec{x}_0 + \delta\vec{h}) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k \right]}_{=:\varepsilon(\vec{h})}.
 \end{aligned}$$

Wenn nun $\|\vec{h}\|$ sehr nahe bei 0 liegt, so wird das Restglied $\varepsilon(\vec{h})$ ebenfalls sehr nahe bei 0 sein, d.h. es gilt sogar

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\varepsilon(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0.$$

Somit bekommen wir die **Taylorformel 2. Ordnung**:

$$\begin{aligned}
 &f(x_0^{(1)} + h_1, \dots, x_0^{(n)} + h_n) \\
 &= f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) + \left[\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{x}_0) \cdot h_i \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) \cdot h_j \cdot h_i \right] + \varepsilon(\vec{h}).
 \end{aligned}$$

In Skalarproduktschreibweise ist die Formel:

$$f(x_0^{(1)}+h_1, \dots, x_0^{(n)}+h_n) = f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{h}, H_f(\vec{x}_0) \vec{h} \rangle + \varepsilon(\vec{h}),$$

wobei $H_f(\vec{x}_0)$ die Hesse-Matrix von f ausgewertet an der Stelle $\vec{x}_0$ ist.

Im Fall $n = 2$ mit $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ und $\vec{h} = (h_1, h_2)$ erhält man speziell:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \\ = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot h_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x_0, y_0) \cdot h_1^2 + f_{xy}(x_0, y_0) \cdot h_1 \cdot h_2 + f_{yx}(x_0, y_0) \cdot h_2 \cdot h_1 + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot h_2^2 \right] \\ & + \varepsilon(\vec{h}). \end{aligned}$$

Da f nach Voraussetzung zweimal stetig partiell differenzierbar ist, ist nach dem Satz von Schwarz $f_{xy} = f_{yx}$; siehe Skriptum Seite G-22. Somit vereinfacht sich die Formel im Fall $n = 2$ zu

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot h_2 \\ & + \frac{h_1^2}{2} f_{xx}(x_0, y_0) + f_{xy}(x_0, y_0) \cdot h_1 \cdot h_2 + \frac{h_2^2}{2} f_{yy}(x_0, y_0) + \varepsilon(\vec{h}). \end{aligned}$$