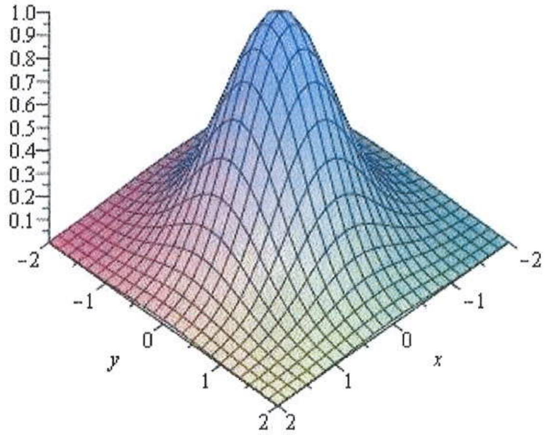
Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
16. Mai 2012

Zur Illustration von Extremwerten im Mehrdimensionalen:

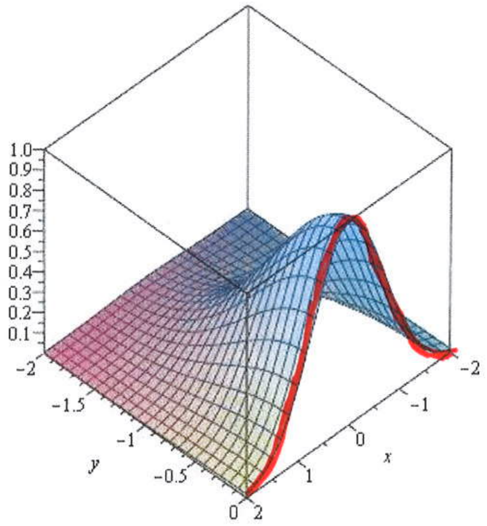
Man betrachte folgende Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}.$$



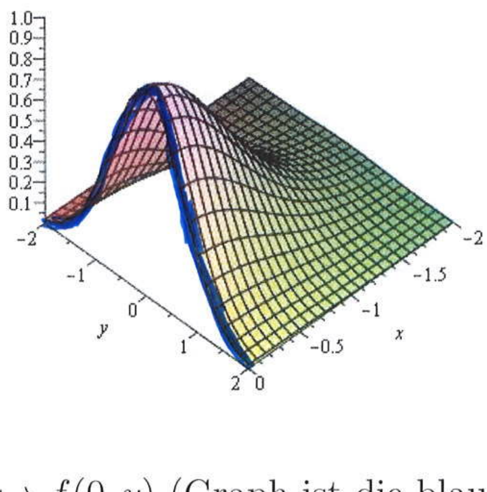
Diese Funktion besitzt bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ein Maximum, da stets $-x^2 - y^2 \leq 0$ ist.

Wenn man die Graphenfläche **entlang der x-Achse schneidet**, ergibt sich folgendes Bild:



D.h. die Funktion $g : x \mapsto f(x, 0)$ (Graph ist die rote Linie) besitzt ebenfalls bei $x = 0$ ein Maximum. D.h. die erste Ableitung von g ist dort 0, d.h. $0 = g'(0) = f_x(0, 0)$.

Umgekehrt: **schneidet** man die Graphenfläche **entlang der y-Achse**, ergibt sich folgendes Bild:

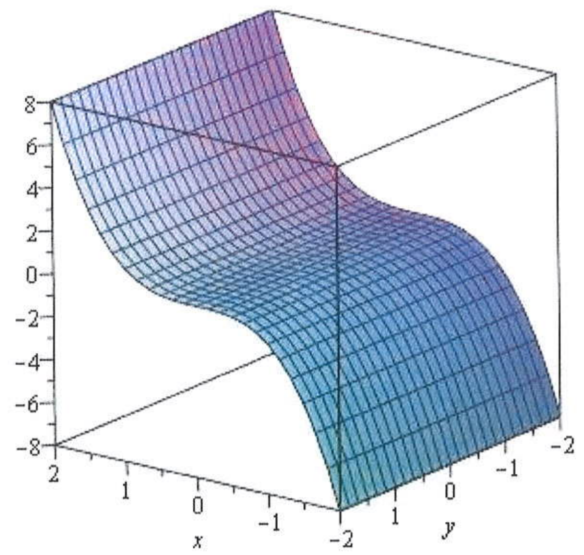


D.h. die Funktion $h : y \mapsto f(0, y)$ (Graph ist die blaue Linie) besitzt ebenfalls bei $y = 0$ ein Maximum. D.h. die erste Ableitung von h ist dort 0, d.h. $0 = h'(0) = f_y(0, 0)$. Somit muß für die Extremstelle (x_0, y_0) gelten:

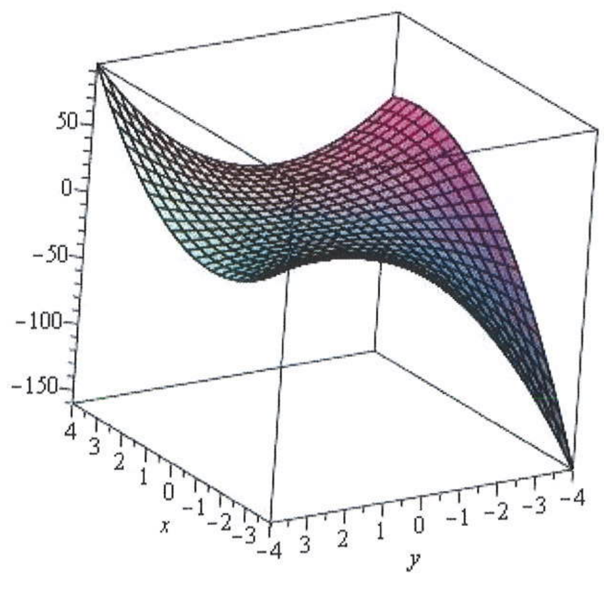
$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}.$$

Weitere Beispiele:

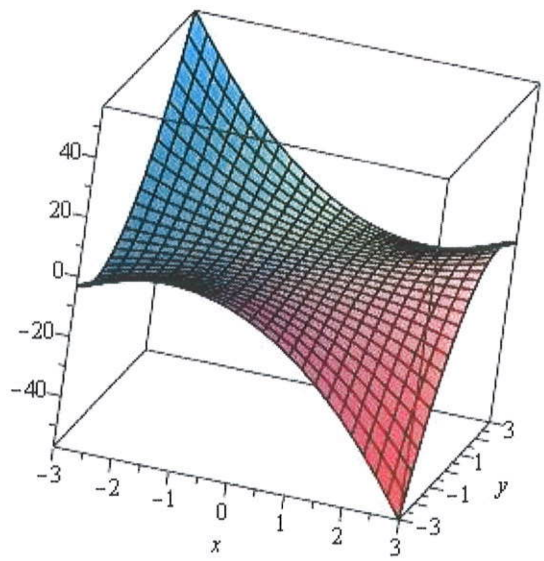
1. $f(x, y) = x^3$ besitzt Sattelpunkte an allen Stellen $(0, y), y \in \mathbb{R}$:



2. $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$:



3. $f(x, y) = x^2y - xy^2 + y$:



4. $f(x, y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2$: