Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
12. Mai 2014

Welche Art von stationären Punkten liegen vor?

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $\vec{a} \in \mathbb{R}$ ein stationärer Punkt, d.h. $\nabla f(\vec{a}) = 0$.

Wir bestimmen zunächst eine vereinfachte Taylorentwicklung zur Funktion

$$g(t) := f(\vec{a} + t\vec{h}),$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ und $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ ein "Störvektor" ist. Aus dem Eindimensionalen erhält man folgende Taylorentwicklung von g mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$:

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0 + \delta t) \qquad \text{für } 0 < \delta < 1.$$

Es ist $g(0) = f(\vec{a})$. Wir haben bereits gesehen, daß

$$\begin{aligned} g'(0) &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{a}) \cdot h_i = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{h} \rangle, \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\vec{a} + t\vec{h}) \cdot h_i \cdot h_j = \langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + t\vec{h})\vec{h} \rangle, \end{aligned}$$

wobei $H_f(\vec{x})$ die Hesse-Matrix zu f ist. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} g(1) &= f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\langle \underbrace{\nabla f(\vec{a})}_{=0}, \vec{h} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h})\vec{h} \rangle \\ &= f(\vec{a}) + \frac{1}{2} \langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h})\vec{h} \rangle. \end{aligned}$$

Falls nun $\langle \vec{h}, H_f(\vec{a})\vec{h} \rangle > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{h} \neq 0$ ist, so folgt daraus, daß

$$\langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h})\vec{h} \rangle > 0, \text{ falls } \vec{a} + \delta\vec{h} \text{ nahe genug bei } \vec{a} \text{ liegt,}$$

d.h. falls $\|\vec{h}\|$ sehr nahe bei 0 liegt. Dies folgt aus der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ zweiter Ordnung nach Voraussetzung.

Wir setzen nun $\vec{h} := \vec{x} - \vec{a}$, wobei $\vec{x}$ nahe bei $\vec{a}$ liegt. Somit:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a} + \vec{h}) = g(1) = f(\vec{a}) + \frac{1}{2} \langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h})\vec{h} \rangle > f(\vec{a}),$$

falls $\vec{x}$ nahe bei $\vec{a}$ liegt und falls $\langle \vec{h}, H_f(\vec{a})\vec{h} \rangle > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{h} \neq 0$ ist. D.h. in diesem Fall liegt ein **Minimum** bei $\vec{a}$ vor.

Analog: falls $\vec{x}$ nahe bei $\vec{a}$ liegt und falls $\langle \vec{h}, H_f(\vec{a})\vec{h} \rangle < 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{h} \neq 0$ ist, so gilt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a} + \vec{h}) = g(1) = f(\vec{a}) + \frac{1}{2}\langle \vec{h}, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h})\vec{h} \rangle < f(\vec{a}),$$

d.h. in diesem Fall liegt ein **Maximum** bei $\vec{a}$ vor.

Falls nun $\vec{x}$ sehr nahe bei $\vec{a}$ liegt und falls es Vektoren $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle \vec{h}_1, H_f(\vec{a})\vec{h}_1 \rangle > 0$ und $\langle \vec{h}_2, H_f(\vec{a})\vec{h}_2 \rangle < 0$, so wird f größer, wenn man sich in Richtung $\vec{h}_1$ von $\vec{a}$ entfernt bzw. wird f kleiner, wenn man sich in Richtung $\vec{h}_2$ von $\vec{a}$ entfernt, d.h.

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + \vec{h}_1) &= f(\vec{a}) + \frac{1}{2}\langle \vec{h}_1, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h}_1)\vec{h}_1 \rangle > f(\vec{a}), \\ f(\vec{a} + \vec{h}_2) &= f(\vec{a}) + \frac{1}{2}\langle \vec{h}_2, H_f(\vec{a} + \delta\vec{h}_2)\vec{h}_2 \rangle < f(\vec{a}). \end{aligned}$$

Somit liegt in diesem Fall ein **Sattelpunkt** an der Stelle $\vec{a}$ vor.

Dies führt zur Definition von positiv-/negativ-definiten Matrizen; siehe Skriptum Seite G-28.