Folie zur Vorlesung “Mathematik B”
11. Mai 2016

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2.$$

Lösung: Zunächst werden die stationären Punkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y - y^2 \\ x^2 - x - 2xy + 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Also muß gelten:

$$\begin{aligned} 2xy - y - y^2 &= 0, & (1) \\ x^2 - x - 2xy + 2y &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, so wird (1) zu “$0 = 0$” und Gleichung (2) zu

$$x^2 - x = 0, \quad \text{d.h. } x(x-1) = 0, \quad \text{d.h. } x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Also sind $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,0)$ stationär!
Nun betrachten wir den Fall $y \neq 0$ und kürzen in Gleichung (1) durch y und erhalten:

$$2x - 1 - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2x - 1.$$

Dies setzen wir in Gleichung (2) ein:

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 2x \cdot (2x-1) + 2 \cdot (2x-1) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x^2 - x - 4x^2 + 2x + 4x - 2 = 0 \\ \Longrightarrow \quad & -3x^2 + 5x - 2 = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-5-1}{-6} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Also sind auch die Punkte

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \; P_4 = (1,1)$$

stationär!

Zur Bestimmung der Typen der stationären Punkte berechnen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1-2y \\ 2x-1-2y & -2x+2 \end{pmatrix}.$$

Typbestimmung der stationären Punkte:

1. **$P_1 = (0,0)$:** Es ist
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(0,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Somit ist P_1 ein **Sattelpunkt**.

2. **$P_2 = (1,0)$:** Es ist
$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,0)$ indefinit, und somit ist P_2 ein **Sattelpunkt**.

3. **$P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$:** Es ist
$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
Da
$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0 \quad \text{und} \quad \det H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0,$$
ist $H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ positiv definit. Somit ist P_3 ein **Minimum**.

4. **$P_4 = (1,1)$:** Es ist
$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,1) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,1)$ indefinit, und somit ist P_4 ein **Sattelpunkt**.