Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

21. Mai 2014

Transformationsregel für Mehrfachintegrale (Substitution)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, meßbare Menge und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion.

Gesucht: $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$

Ziel ist die Berechnung des Mehrfachintegrals durch eine **Koordinatentransformation**: für die “alten” Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ führen wir “neue” Variablen $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ein, d.h. wir ersetzen die Variablen x_i durch Ausdrücke in den Variablen $u_1, \dots, u_n$:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(u_1, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1, \dots, u_n)\end{aligned}$$

D.h. wir ersetzen die Variable x_i durch eine Funktion $x_i(u_1, \dots, u_n)$ in den Variablen $u_1, \dots, u_n$.

Wir müssen dazu den Integrationsbereich anpassen: der neue Integrationsbereich ist gegeben durch

$$E = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \in D\}$$

Achtung: die Zuweisung $\vec{x} \leftrightarrow \vec{u}$ muß **eindeutig** sein, d.h. zu jedem $\vec{x} \in D$ muß genau ein $\vec{u} \in E$ existieren und umgekehrt. Daher muß man ggf. weitere Restriktionen an die Variablen $u_1, \dots, u_n$ stellen (z.B. bei Polarkoordinaten die Restriktionen $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Sei J die Jacobimatrix dieser Variablentransformation, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

Durch diese Transformation müssen wir die Integration anpassen:

$$d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n \longrightarrow |\det J| du_1 du_2 \dots du_n.$$

Die Determinante muß als Funktion von $\vec{u}$ stetig sein und auf E (bis auf Nullmengen) ungleich Null sein.

Somit erhalten wir die **Transformationsregel** wie folgt:

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_E f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \cdot |\det J| du_1 du_2 \dots du_n.$$