Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
07. Juni 2016

Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 1:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Es wird folgende Substitution durchgeführt:

$$z = \frac{y}{x}.$$

Daraus folgt $y = xz$ und

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{z}{x},$$

bzw. nach y' aufgelöst

$$y' = xz' + z.$$

Einsetzen in (1) ergibt

$$xz' + z = f(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \frac{1}{x} \cdot \big(f(z) - z\big). \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung ist nun durch Trennung der Variablen zu lösen und man erhält daraus die Lösung von (1) als $y = xz$.

Beispiel: Man löse

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x}. \tag{3}$$

D.h. es ist $f(t) = \sqrt{t-1} + t$. Eingesetzt in (2) ergibt dies also die neue DGL

$$z' = \frac{1}{x}\Big(\big(\sqrt{z-1} + z\big) - z\Big) = \frac{\sqrt{z-1}}{x}.$$

Diese DGL wird mit Hilfe von Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned}
z' = \frac{\sqrt{z-1}}{x} \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{z-1}}{x} \\
&\Longrightarrow \qquad \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \frac{dx}{x} \\
&\Longrightarrow \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Longrightarrow \qquad 2\sqrt{z-1} = \ln|x| + c \\
&\Longrightarrow \qquad z - 1 = \frac{1}{4}\big(\ln|x| + c\big)^2 \\
&\Longrightarrow \qquad z = \frac{1}{4}\big(\ln|x| + c\big)^2 + 1.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Lösung für (3) als

$$y = xz = \frac{x}{4}\big(\ln|x| + c\big)^2 + x.$$

Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 2:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\Big(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\Big). \tag{4}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$\text{Fall 1:} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{Fall 2:} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Zum Fall 1: Wir nehmen $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ an; falls $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, so liegt eine DGL der Form $y' = f(\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c})$ vo, siehe weiter unten (5).

Die Vektoren (a, b) und (α, β) sind linear abhängig, d.h. es exisiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda(\alpha, \beta) = (a, b).$$

D.h. es gilt:

$$ax + by = \lambda\alpha x + \lambda\beta y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Wir machen nun folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\
= \; &\frac{\lambda\big(\alpha x + \beta y\big) + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\
= \; &\frac{\lambda\big(\alpha x + \beta y + \frac{c}{\lambda}\big)}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\
= \; &\frac{\lambda\big(\alpha x + \beta y + \gamma - (\gamma - \frac{c}{\lambda})\big)}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\
= \; &\lambda \cdot \Big(1 - \frac{\gamma - \frac{c}{\lambda}}{\alpha x + \beta y + \gamma}\Big).
\end{aligned}$$

Setze nun

$$g(t) := \lambda \cdot \Big(1 - \frac{\gamma - \frac{c}{\lambda}}{t}\Big) \quad \text{und} \quad F(t) = (f \circ g)(t) = f\big(g(t)\big).$$

Somit kann man die Differentialgleichung 4 schreiben als

$$y' = f\big(g(\alpha x + \beta x + \gamma)\big) = F(\alpha x + \beta y + \gamma). \tag{5}$$

Falls $\beta = 0$, so hängt $F(\alpha x + \beta y + \gamma) = F(\alpha x + \gamma)$ nur von x und <u>nicht</u> von y ab; somit kann man die Lösung mittels Trennung der Variablen bestimmen.

Wir nehmen nun im Folgenden $\beta \neq 0$ an. Man substituiere

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Daraus folgt

$$z' = \alpha + \beta y', \qquad \text{d.h. } y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}.$$

Einsetzen in (5) ergibt

$$\frac{z' - \alpha}{\beta} = F(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \beta F(z) + \alpha. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung ist möglicherweise einfacher zu lösen als die Ausgangsgleichung (4).

Beispiel: Man löse

$$y' = f\Big(\frac{4x - 6y + 6}{2x - 3y + 2}\Big) \qquad \text{mit } f(t) = \frac{1}{(t-2)^2} + \frac{2}{3}.$$

Es gilt: $2 \cdot (2x - 3y) = 4x - 6y$, d.h. es liegt Fall 1 vor mit $\lambda = 2$, $c = 6$, $\gamma = 2, \beta = -3$. Man substituiere $z = 2x - 3y + 2$. Ferner ist

$$g(t) = 2 \cdot \Big(1 - \frac{2 - \frac{6}{2}}{t}\Big) = 2 + \frac{2}{t}.$$

Also:

$$F(t) = f(g(t)) = \frac{1}{\left(2 + \frac{2}{t} - 2\right)^2} + \frac{2}{3} = \frac{t^2}{4} + \frac{2}{3}.$$

Eingesetzt in Formel (6) ergibt dies die neue DGL:

$$z' = \Big(\frac{z^2}{4} + \frac{2}{3}\Big)(-3) + 2 = -\frac{3}{4}z^2.$$

Mit Hilfe der Methoder der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}
& & \frac{dz}{dx} &= -\frac{3}{4}z^2 \\
&\Longrightarrow & \frac{dz}{z^2} &= -\frac{3}{4}dx \\
&\Longrightarrow & \int \frac{dz}{z^2} &= \int -\frac{3}{4}dx \\
&\Longrightarrow & -\frac{1}{z} &= -\frac{3}{4}x + c_0 \\
&\Longrightarrow & z &= \frac{1}{\frac{3}{4}x - c_0} = \frac{4}{3x + c_1}.
\end{aligned}$$

Da $z = 2x - 3y + 2$, ergibt sich für die gesuchte Lösung y:

$$y = \frac{1}{3}(2x + 2 - z) = \frac{2}{3x} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x + c_2}.$$

Zum Fall 2: In diesem Fall ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ \alpha x + \beta y &= -\gamma \end{aligned}$$

eindeutig lösbar. Sei (x_0, y_0) die zugehörige, eindeutige Lösung. Man setze

$$\bar{x} := x - x_0, \quad \bar{y} := y - y_0.$$

Man macht folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} &= \frac{a(\bar{x} + x_0) + b(\bar{y} + y_0) + c}{\alpha(\bar{x} + x_0) + \beta(\bar{y} + y_0) + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + ax_0 + by_0 + c}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}} \\ &= \frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}. \end{aligned}$$

Da $\bar{y}' = (y - y_0)' = y'$, erhält man folgende neue DGL:

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right). \tag{7}$$

Man substituiere

$$z = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad \text{d.h.} \;\; \bar{y} = \bar{x}z.$$

Also:

$$z' = \frac{\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{z}{\bar{x}}.$$

Aufgelöst nach $\bar{y}'$ ergibt dies

$$\bar{y}' = z'\bar{x} + z.$$

Eingesetzt in (7) ergibt dies

$$z'\bar{x} + z = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right),$$

bzw. aufgelöst nach z':

$$z' = \frac{1}{\bar{x}} f\Big(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\Big) - \frac{z}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}}\Big(f\Big(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\Big) - z\Big). \tag{8}$$

Die Differentialgleichung ist nun mit Hilfe von Trennung der Variablen zu lösen. Daraus erhält man die Lösung von (4) als

$$y = \bar{y} + y_0 = \bar{x}z + y_0 = (x - x_0)z + y_0.$$

Beispiel: Man löse

$$y' = f\Big(\frac{2x+y-1}{3x+y+1}\Big) \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{t-1}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 3x + y &= -1 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar mit der Lösung $(x_0, y_0) = (-2, 5)$. Die Differentialgleichung (8) wird also in diesem konkreten Beispiel zu

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{\bar{x}}\left(\frac{1}{\frac{2+z}{3+z} - 1} - z\right) = \frac{1}{\bar{x}}\left(\frac{3+z}{2+z-3-z} - z\right) = \frac{1}{\bar{x}}\big(-3 - z - z\big) \\ &= -\frac{1}{\bar{x}}\big(3 + 2z\big). \end{aligned} \tag{9}$$

Mit Hilfe von Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\bar{x}}\big(3+2z\big) \\ \Longrightarrow\quad & \frac{dz}{3+2z} = -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \Longrightarrow\quad & \int \frac{dz}{3+2z} = \int -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{2}\ln|3+2z| = -\ln|\bar{x}| + c_0. \end{aligned}$$

Man beachte, daß $\frac{1}{2}\ln|3+2z| = \ln\sqrt{|3+2z|}$. Somit ergibt sich:

$$\sqrt{|3+2z|} = e^{-\ln|\bar{x}| + c_0} = \frac{1}{|\bar{x}|} \cdot c_1 \text{ mit } c_1 > 0.$$

Quadrieren ergibt

$$|3+2z| = \frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2$$

und daraus ergibt sich:

$$3 + 2z = \frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2 \quad \text{bzw.} \quad 3 + 2z = -\frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2$$

Aufgelöst nach z ergibt das die Lösungen von (9):

$$z = \frac{c_2}{2\bar{x}^2} - \frac{3}{2} \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Somit ist die Lösung für y gegeben durch

$$y = (x - x_0)z + y_0 = (x+2)\left(\frac{c_2}{2(x+2)^2} - \frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{c_2}{2(x+2)} - \frac{3}{2}(x+2) + 5.$$