Folie zur Vorlesung “Mathematik B”
20. Juni 2012

<u>Exakte Differentialgleichungen:</u>

<u>Definition:</u> Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0$$

heißt <u>exakt</u>, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ gibt mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt dann $F_x(x,y) = A(x,y)$ und $F_y(x,y) = B(x,y)$

In diesem Fall ist dann eine (implizite) **Lösung** gegeben durch

$$F\big(x, y(x)\big) = c.$$

Denn Ableiten auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial F\big(x,y(x)\big)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}_{=A(x,y)} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}_{=B(x,y)} \underbrace{\frac{\partial y(x)}{\partial x}}_{=y'(x)} = 0.$$

Ein <u>Kriterium</u>, wann eine DGL **exakt** ist, liefert folgende (hinreichende) **Integrabilitätsbedingung**:

$$A_y(x,y) = B_x(x,y).$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so handelt es sich um eine exakte DGL, denn:

$$F_{xy}(x,y) = A_y(x,y) = B_x(x,y) = F_{yx}(x,y)$$

D.h. die Ableitungsreihenfolge ist vertauschbar, und man kann durch zweimaliges Integrieren (zuerst nach x, dann nach y integrieren, oder umgekehrt) die Funktion F bestimmen.

<u>Beispiele:</u> Siehe Tafel!

Lösen einer exakten Differentialgleichung:

Es sei eine **exakte** Differentialgleichung gegeben:

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0$$

D.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ gibt mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist gegeben durch $F(x,y) = c$, wobei die Funktion $F(x,y)$ nun zu bestimmen ist. Zunächst:

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,dx = \int A(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{1}$$

wobei $\varphi(y)$ eine Funktion in Abhängigkeit von y ist, aber <u>nicht</u> von x abhängt. Man beachte, daß Terme in y durch Ableiten und nachfolgendes Integrieren "verschwinden", weshalb $\varphi(y)$ hinzugefügt werden muß. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx + \varphi(y)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx\Big) + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Aufgelöst nach $\varphi'(y)$ ergibt dies

$$\varphi'(y) = B(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int A(x,y)\,dx\Big).$$

Daraus können wir durch Integration nach y die Funktion $\varphi(y)$ berechnen. Eingesetzt in (1) erhalten wir daraus die gesuchte Funktion $F(x,y)$.

Beispiel: Siehe Tafel!

Bemerkung: Manchmal hängt es nur von der Formulierung der DGL ab, ob sie exakt ist oder nicht: siehe Beispiel im Skriptum auf Seite I-21.

Definition: Eine stetige Funktion $\mu(x,y)$ mit $\mu(x,y) \neq 0$ für alle (x,y) im Definitionsbereich heißt <u>integrierender Faktor</u> der DGL $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$, wenn die DGL

$$\mu(x,y)A(x,y) + \mu(x,y)B(x,y)y' = 0$$

exakt ist.

<u>Frage:</u> Wie findet man nun einen passenden integrierenden Faktor $\mu(x,y)$?

Die Integrabilitätsbedingung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)A(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)B(x,y)\big),$$

d.h.

$$\mu_y(x,y)\cdot A(x,y) + \mu(x,y)A_y(x,y) = \mu_x(x,y)\cdot B(x,y) + \mu(x,y)B_x(x,y),$$

bzw. umgeschrieben ergibt dies:

$$\mu(x,y)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = \mu_x(x,y)\cdot B(x,y) - \mu_y(x,y)\cdot A(x,y). \qquad (2)$$

Daraus kann man $\mu(x,y)$ bestimmen, falls $\mu(x,y)$ tatsächlich **nur** von x oder **nur** von y abhängt, d.h. falls entweder $\mu_x(x,y) = 0$ oder $\mu_y(x,y) = 0$ für alle (x,y):

1. Falls $\mu_x(x,y) = 0$: D.h. μ hängt nur von y ab, und wir schreiben nur $\mu(y)$. Eingesetzt in (2) liefert

   $$\mu(y)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = -\mu_y(y)\cdot A(x,y),$$

   bzw. umgeschrieben

   $$\mu_y(y) = \frac{B_x(x,y) - A_y(x,y)}{A(x,y)}\mu(y).$$

   Falls nun $\big(B_x(x,y) - A_y(x,y)\big)/A(x,y)$ ebenfalls **nur** von y abhängt, so hat man eine homogene DGL erster Ordnung und kann μ bestimmen als

   $$\mu(x,y) = \mu(y) = e^{\int \frac{B_x(x,y) - A_y(x,y)}{A(x,y)} dy}.$$

2. Falls $\mu_y(x,y) = 0$: D.h. μ hängt nur von x ab, und wir schreiben nur $\mu(x)$. Eingesetzt in (2) liefert

   $$\mu(x)\cdot\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big) = \mu_x(x)\cdot B(x,y),$$

   bzw. umgeschrieben

   $$\mu_x(x) = \frac{A_y(x,y) - B_x(x,y)}{B(x,y)}\mu(x)$$

   Falls nun $\big(A_y(x,y) - B_x(x,y)\big)/B(x,y)$ ebenfalls **nur** von x abhängt, so hat man eine homogene DGL erster Ordnung und kann μ bestimmen als

   $$\mu(x,y) = \mu(x) = e^{\int \frac{A_y(x,y) - B_x(x,y)}{B(x,y)} dy}.$$

Beispiel: Siehe Tafel!