Folien zur Vorlesung "Mathematik B" 29. Juni 2010

Ansatzmethode bei linearen DGL-Systemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei ein lineares DGL-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten gegeben:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x),$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir nehmen an, dass der Störvektor $\vec{b}(x)$ folgende Form besitzt:

$$\vec{b}(x) = e^{\alpha x}\left[\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}\cos(\beta x) + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\sin(\beta x)\right].$$

Da $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$, können wir $\cos(\beta x)$ und $\sin(\beta x)$ wir folgt umschreiben:

$$\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\big(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\big), \quad \sin(\beta x) = -\frac{i}{2}\big(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\big).$$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in $\vec{b}(x)$ ein:

$$\begin{aligned}
\vec{b}(x) &= e^{\alpha x}\left[\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}\frac{e^{i\beta x}}{2} + \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}\frac{e^{-i\beta x}}{2} - \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\frac{i}{2}e^{i\beta x} + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\frac{i}{2}e^{-i\beta x}\right] \\
&= \underbrace{e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\right]}_{=:\vec{b}_1(x)} + \underbrace{e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}\right]}_{=:\vec{b}_2(x)}
\end{aligned}$$

Das heißt, wir können den Störvektor zerlegen in $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$. Man beachte, daß $\vec{b}_2(x) = \overline{\vec{b}_1(x)}$. Wir berechnen nun zum System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ eine spezielle (komplex-wertige) Lösung $\vec{y}_{1,sp}(x)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}\begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix},$$

wobei $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ Polynome mit unbekannten Koeffizienten sind vom Grad $\mu(\alpha + i\beta) + m$, wobei m der maximal auftretende Grad der Polynome $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ ist und $\mu(\alpha+i\beta)$ die Vielfachheit von $\alpha+i\beta$ als Nullstelle im charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist. Man leitet dann $\vec{y}_{1,sp}(x)$ komponentenweise nach x ab, setzt in das inhomogene DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y}+\vec{b}(x)$ ein und mittels Koeffizientenvergleich werden die (eventuell komplexwertigen) Koeffizienten von $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ bestimmt.

Beobachtung: $\vec{y}_{2,sp}(x) := \overline{\vec{y}_{1,sp}(x)}$ ist dann eine spezielle Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_2(x)$, denn:

$$\begin{aligned}
\vec{y}\,'_{2,sp}(x) &= \overline{\vec{y}\,'_{1,sp}(x)} = \overline{A\vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{b}_1(x)} = \overline{A}\,\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \overline{\vec{b}_1(x)} \\
&= A\,\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \vec{b}_2(x) = A\,\vec{y}_{2,sp}(x) + \vec{b}_2(x).
\end{aligned}$$

Somit ist eine spezielle (reellwertige) Lösung zum Störvektor $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = \vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{y}_{2,sp}(x) = 2\mathrm{Re}\big(\vec{y}_{1,sp}(x)\big).$$

Beispiel: Man löse folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 - y_2 + e^{2x}\cos(x), \\
y_2' &= y_1 + 2y_2, \\
y_1(0) = 1, &\qquad y_2(0) = 2.
\end{aligned}$$

Lösung: Die zugehörige Koeffizientenmatrix und der Störvektor sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2+1 = \big(\lambda-(2+i)\big)\big(\lambda-(2-i)\big).$$

Wir berechnen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2 + i$:

$$\vec{0} = \big(A - (2+i)I\big)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich $v_2 = -iv_1$. Wir setzen $v_1 = 1$ und erhalten somit den Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1, -i)^t$. Somit ergibt sich eine komplexe Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ als

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{y}}_1(x) = e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &= e^{2x}\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{e^{2x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}}_{=\vec{y}_1(x)} + i\,\underbrace{e^{2x}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}}_{=\vec{y}_2(x)}\end{aligned}$$

Aufspalten von $\vec{\tilde{y}}_1(x)$ nach Real- und Imaginärteil liefert die reellwertigen Lösungen $\vec{y}_1(x)$ uznd $\vec{y}_2(x)$, d.h. die vollständige (reellwertige) Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist

$$\vec{y}_{hom}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x) = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Nun suchen wir eine spezielle (reellwertige) Lösung des inhomogenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$. Die Störfunktion hat die Form

$$\vec{b}(x) = e^{2x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(x)\right] = \underbrace{e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_1(x)} + \underbrace{e^{(2-i)x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_2(x)},$$

d.h. $p_1(x) = 1, p_2(x) = q_1(x) = q_2(x) = 0$ und $m = \max\{\deg(p_i), \deg(q_i)\} = 0$. Wir berechnen nun eine spezielle (komplex-wertige)Lösung zum System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß $2 + i$ ein Eigenwert von A ist, so daß die Polynome mit unbekannten Koeffizienten im Ansatz den Grad $\mu(2+i)+m = 1+0$ besitzen. Komponentenweise Differentiation von $\vec{y}_{1,sp}(x)$ ergibt:

$$\vec{y}'_{1,sp}(x) = (2+i)e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix} + e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in das DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ liefert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(2+i)e^{(2+i)x}(A+Bx) + e^{(2+i)x}B &= 2e^{(2+i)x}(A+Bx) - e^{(2+i)x}(C+Dx) + \frac{e^{(2+i)x}}{2}, \\ (2+i)e^{(2+i)x}(C+Dx) + e^{(2+i)x}D &= e^{(2+i)x}(A+Bx) + 2e^{(2+i)x}(C+Dx).\end{aligned}$$

Kürzen durch $e^{(2+i)x}$ und Sortieren nach Potenzen von x ergibt:

$$\begin{aligned}(2+i)Bx + \big((2+i)A + B\big) &= (2B-D)x + \big(2A - C + \frac{1}{2}\big),\\ (2+i)Dx + \big((2+i)C + D\big) &= (B+2D)x + (A+2C).\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(2+i)B &= 2B - D,\\ (2+i)A + B &= 2A - C + \frac{1}{2},\\ (2+i)D &= B + 2D,\\ (2+i)C + D &= A + 2C.\end{aligned}$$

Aus der vierten Gleichung folgt $A = iC + D$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich damit:

$$B = -C + \frac{1}{2} - iA = -C + \frac{1}{2} + C - iD = \frac{1}{2} - iD.$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies $D = -iB = -i/2 - D$, d.h. $D = -i/4$ und somit $B = 1/4$. Die zweite und vierte Gleichung vereinfachen sich somit zu

$$iA = -C + \frac{1}{4}, \quad iC - \frac{i}{4} = A.$$

Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt:

$$C = \frac{1}{4} - iA = \frac{1}{4} + C - \frac{1}{4} = C,$$

d.h. C ist frei wählbar, z.B. $C = 0$ und damit $A = -i/4$. Somit ist eine spezielle Lösung $\vec{y}_{1,sp}(x)$ zu $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} \frac{-i}{4} + \frac{1}{4}x \\ -\frac{i}{4}x \end{pmatrix}$$

Der Realteil von $\vec{y}_{1,sp}(x)$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(\vec{y}_{1,sp}(x)\big) &= \mathrm{Re}\left[e^{2x}\begin{pmatrix} -\frac{i}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) + \frac{ix}{4}\sin(x) \\ -\frac{i}{4}x\cos(x) + \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}\right]\\ &= e^{2x}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Somit ist eine reellwertige spezielle Lösung des zu Beginn gegebenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = 2\mathrm{Re}\big(\vec{y}_{1,sp}(x)\big) = 2e^{2x}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{all}(x) = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des AWP setzen wir $x = 0$ in die allgemeine Lösung ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2. \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des AWP gegeben durch

$$\vec{y}(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$