Übung 1

Bestimmen Sie Infimum und Supremum sowie Maximum und Minimum, falls letztere existieren, der folgenden Mengen:

(a) $A = \{\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2} : \ n \in \mathbb{N}\}$; (2 pt)

(b) $B = \{2x^2 - 2x + 5 \geq 0 : \ x \in \mathbb{R}\}$; (2 pt)

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$ und $C' = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$; (2 pt)

(d) $D = \{\frac{n^2-1}{n^2+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$. (2 pt)

Übung 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden Eigenschaften

(a) (2 pt)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1, \ \forall n \geq 1, \ \text{wobei } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n;$$

(b) (von der Klausur am 21.3.18) (2 pt)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}, \ \forall n \geq 0.$$

(c) Jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen. (3 pt)

(d) (von der Klausur am 28.11.18) (3 pt)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(e) (3 pt)

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \ \forall n \geq 0;$$

Ist diese Gleichung immer richtig? Warum?

Übung 3 (von M. Dedo) (3 pt)

Der kleine Daniele, der in der Schule gerade die vollständige Induktion gelernt hat stellt nun folgende Behauptung auf: **Zwei natürliche Zahlen, deren Maximum eine natürliche Zahl ist, sind gleich. D.h.**

$$A(n) = \{a, b \in \mathbb{N} \textbf{ und } \max\{a, b\} = n \in \mathbb{N} \textbf{ dann ist } a = b\}$$

Daniele argumentiert nun so:
Zuerst betrachtet Daniele $A(0)$. Es ist klar, dass $A(0)$ gilt, weil in diesem Fall $a = b = 0$ sein muss (Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage gilt für jedes Paar $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $\max\{a, b\} = n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme).
Nun zeigt er, dass es für ein Paar $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $\max\{a, b\} = n + 1 \in \mathbb{N}$, gilt: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $\max\{a, b\} = n + 1 \in \mathbb{N}$. Dann ist $\max\{a - 1, b - 1\} = n \in \mathbb{N}$. Nach Induktionsannahme (angewandt auf $A(n)$) gilt, dass $a - 1 = b - 1$ und so $a = b$.
Hat Daniele am Wochenende zu wenig geschlafen und etwas falsch gemacht?

Übung 4 (4 pt)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion den folgenden Binomischen Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$