Übung 9

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\geq\mathbb{N}}$ konvergent sind und finden Sie den Limes, wenn er existiert.

(a) $a_n = \frac{-n^2-3}{3n^3+1} + j \cdot \frac{2n-n^4}{\pi n^4+1}$; (2 pt)

(b) $a_n = \frac{4^n-3^n}{n+(-1)^n+2^{3n}}$; (2 pt)

(c) $a_n = \sqrt[n]{e^n - 2^n + 1}$; (2 pt)

(d) $a_n = (\frac{-\sqrt{23}}{5})^n$; (2 pt)

(e) $a_n = (\frac{n-3}{n})^n$; (2 pt)

(f) $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$; (3 pt)

(g) $a_n = (1 + \frac{3}{n^3})^{2n^3}$; (3 pt)

(h) $a_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$; (3 pt)

(i) $a_n = \frac{5^n}{n!+2^n}$; (2 pt)

(l) $a_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$. (2 pt)

Übung 10 (3 pt)

Sei

$$a_n = \pi(-1)^n - \frac{(-1)^{n^2}+n}{n^2}.$$

(a) Ist $\{a_n\}$ beschränkt? Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ monoton ist. Ist $\{a_n\}$ konvergent?

(b) Können Sie ohne Rechnung sagen, ob die Folge $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ enthält? Warum? Welche Häufungswerte hat $\{a_n\}$?

Übung 11 (4 pt)

Sei $a_n = \frac{n^3-3n}{2n^3}$. Benutzen Sie die Definition des Limes, um zu zeigen, dass $\lim a_n = 1/2$. Finden Sie das kleinste N_ε, sodass $|a_n - 1/2| = 3/2n^2 < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$.

Übung 12 (2 pt)

Nach der letzten Vorlesung, in der Daniele gesagt hat, dass die Folge $a_n = (-1)^n$

nicht konvergiert, hat er geglaubt, dass er einen Fehler gemacht hat...
Nämlich argumentiert er nun: ich möchte zeigen, dass $\lim a_n = 0$. Mit Hilfe der Definition, muss ich zeigen, dass die Ungleichung $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Ich nehme $\varepsilon = 2$. Dann habe ich $|a_n - 0| = |(-1)^n - 0| = 1 < 2 = \varepsilon$ für alle $n \geq 1$. Das bedeutet, dass für $\varepsilon = 2$ die Ungleichung für alle $n \geq N_\varepsilon = 1$ erfüllt ist und so $\lim(-1)^n = 0$.
Ist der Gedankengang von Daniele richtig oder hat er falsch argumentiert?

Übung 13 (2 pt)

In der Übung 12 hat der Daniele gesagt, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ gegen 0 konvergiert. Er hat geglaubt, dass er einen Fehler gemacht hat...
Nämlich argumentiert er nun: ich möchte zeigen, dass $\lim a_n = 1$. Mit Hilfe der Definition, muss ich zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Dann habe ich $|a_n - 1| = |(-1)^n - 1| = 0 < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $n \geq 1$ gerade. Das bedeutet, dass die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle n gerade mit $n \geq N_\varepsilon = 1$ erfüllt ist und so $\lim(-1)^n = 1$.
Ist der Gedankengang von Daniele richtig oder hat er falsch argumentiert?

Übung 14 (2 pt)

Sei $|a| < 1$ und sei $s_n = 1 + a + a^2 + \cdot + a^n$. Bestimmen Sie $s = \lim s_n$.
Hinweis: Verwenden Sie Übung 2e.