Übung 44 (2 pt)

Zeigen Sie, dass $B = \{3, 2 - 10x, x - x^2\}$ eine Basis von

$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

ist. Schreiben Sie das Polynom $p(x) = 5 + 2x + x^2$ als Linearkombination der Elemente in B. Schreiben Sie die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ und der Basis B.

Übung 45 (Bsp. 4 der Klausur 15.10.15) (4 pt)

Seien $v_1 = (1, 2, -1, 1), v_2 = (0, 2, -1, 1)$ und $v_3 = (1, -2, 1, -1)$ drei Vektoren des $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension des von v_1, v_2 und v_3 erzeugten Unterraums $V \subset \mathbb{R}^4$.

(b) Finden Sie eine orthonormale Basis von V.

(c) Bestimmen Sie die Projektion des Vektors $w = (1, 1, 1, 1)$ auf den Unterraum V.

Übung 46

Seien $v_1(k) = (1, k, 1)$, $v_2(k) = (k, 1, 1)$, $v_3(k) = (1, 1, 2 - k)$ drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von k, für welchen $v_1(k)$ und $v_2(k)$ orthogonal sind. Können Sie auch ein k finden, für welches $v_1(k)$ und $v_2(k)$ parallel sind? (2 pt)

(b) Bestimmen Sie abhängig von $k \in \mathbb{R}$ die Dimension des von den Vektoren $v_1(k)$,$v_2(k)$ und $v_3(k)$ erzeugten Unterraums $V(k)$ des $\mathbb{R}^3$.

(c) Für welche Werte von k ist $\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? (2 pt)

(d) Zeigen Sie, daß der Vektor $(1, 1, 1)$ im Unterraum $V(1)$ aber nicht im $V(0)$ liegt. Finden Sie für $k \neq 0, 1$ die eindeutige (warum?) Darstellung des Vektors $(1, 1, 1)$ als Linearkombination von $v_1(k)$,$v_2(k)$ und $v_3(k)$.

Übung 47

(a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung und die Darstellung durch Gleichungen der Gerade r des $\mathbb{R}^3$ mit Ortsvektor $(1, 1, -1)$ und Richtungsvektor $(1, -1, -1)$. (2 pt)

(b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung und die Darstellung durch Gleichungen der Ebene p des $\mathbb{R}^3$ mit Ortsvektor $(0, 0, 1)$ und Richtungsvektoren $(0, 0, 2), (1, 1, 1)$ und finden Sie mit Hilfe des äußeren Produkts einen Vektor w, der orthogonal zu p ist. (2 pt)

Übung 48 (Bsp. 4 der Klausur 6.10.17) (4 pt)

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, -1, -1)$, $v_3 = (3, -3, 1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $w = (0, 3, -5)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(c) Ist auch die Menge $\{v_1, v_2, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Warum?