Übung 49 (je 2 pt)

Finden Sie eine Basis für die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$:

(a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

(b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | \; x_1 = x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$

Übung 50 (3 pt)

Seien V ein Vektorraum und $W \subset V$ ein Unterraum. Sei $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ eine Basis von W. Zeigen Sie: wenn $< v, w_i >= 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$, dann $< v, w >= 0$ für alle $w \in W$.

Übung 51 (3 pt)

Seien $w_1 = (1, 1, 1, -1), w_2 = (-1, 0, 1, 1), w_3 = (0, 2, 4, 0)$ und $w_4 = (1, 2, 3, -3)$ vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Finden Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens eine Orthonormalbasis des von w_1, w_2, w_3 und w_4 erzeugten Unterraums W. Was ist die Dimension von W? Bestimmen Sie die Projektion von $v = (1, -2, 1, 0)$ auf W. Was können Sie bemerken?

Übung 52 (je. 2 pt)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(d) Zeigen Sie, dass $B \cdot C \neq C \cdot B$.

Übung 53 (4 pt)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$f((x, y, z)) = (y - z, z - x, y - x)$$

definierte Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist und schreiben Sie eine Matrix M auf, die f bezüglich der Basis $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ darstellt.

(b) Bestimmen Sie den Rang von M. Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren v mit der Eigenschaft $f(v) = (0,0,0)$ und zeigen Sie, dass diese Menge ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie dessen Dimension und eine Basis.

Übung 54 (2 pt)

Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $f(1,1,1) = (1,2,3)$, $f(1,0,-1) = (0,1,-1)$ und $f(2,1,0) = (1,3,-1)$

Frohes Fest :)