Übung 59(Bsp. 4 der Klausur von 9.3.17) (3 pt)
Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix A. Ist A diagonalisierbar?

Übung 60 (je. 2 pt)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und, wenn möglich, die Eigenvektoren der folgenden Matrizen und entscheiden Sie, ob sie diagonalisierbar sind:
(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung 61 (3 pt)
Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A und ihre algebraische und geometrische Vielfachheit. Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist. Wenn ja, bestimmen Sie eine othonormale Basis von Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 62 (je 1 Pt.)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antworten:
(a) Seien A und B zwei $n \times n-$Matrizen, deren Rang n ist. Dann haben auch die Matrizen AB und BA Rang n.
(b) Die Teilmenge $\{(x, x^3) : \ x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

(c) Es gibt keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f(1,1,1) = (1,1,1)$, $f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,1,1) = (0,0,0)$.
(d) Sei A eine $n \times n-$Matrix und $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ ihre Eigenwerte. Dann ist A diagonalisierbar.
(e) Sei A eine $n \times n$ Matrix, deren Determinante ungleich 0 ist. Dann hat für alle $b \in \mathbb{R}^n$ das System $Ax = b$ eine eindeutige Lösung.
(f) Wenn

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x) = l \in \mathbb{R},$$

dann ist f bei a differenzierbar und es gilt $f'(a) = l$.

Übung 63 (2 pt)

Für welche Werte von a und b ist die folgende Funktion stetig und differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2ax & \text{falls } x \geq 1 \\ x^3 + ax - b - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung 64 (3 pt)

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ das Polynom $3x^7 + 11x^5 + 150x + k$ genau eine reelle Nullstelle besitzt.

Übung 65 (2 pt)

Überprüfen Sie mit der Definition von Differenziebarkeit, ob die folgende Funktion im Punkt $x = 1$ differenzierbar ist

$$f(x) = e^{|x-1|}.$$