1. ÜBUNGSBLATT

MATHEMATIK A FÜR ELEKTROTECHNIK WS 2014/15 08-10-2014

Übung 1

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) (2 pt)

$$\left|\frac{x-1}{2+x}\right| < \frac{1}{2}$$

(b) (2 pt)

$$\left|\frac{|x|-3}{x-3}\right| > 1$$

(c) (2 pt)

$$|x-1| + |x+1| \geq 3$$

Übung 2

Bestimmen Sie Infimum und Supremum sowie Maximum und Minimum, falls letztere existieren, der folgenden Mengen.

(a) $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : \ n \in \mathbb{N}\}$; (2 pt)

(b) $B = \{x^2 + x + 1 \geq 0 : \ x \in \mathbb{R}\}$; (2 pt)

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ und $C' = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$; (3 pt)

(d) $D = \{\frac{2n+1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$. (2 pt)

Übung 3

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden (Un-)Gleichungen

(a) (2 pt)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1, \ \forall n \geq 1, \text{ wobei } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n;$$

(b) (2 pt)

$$2^{n-1} \leq n!, \ \forall n \geq 1;$$

(c) (3 pt)

$$\sum_{i=-n}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}, \ \forall n \geq 0.$$

(d) Sei $F_0 = F_1 = 1$ und, $\forall n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Die Zahl F_n ist die $n-$te *Fibonacci Zahl*. Sei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zeigen Sie, dass (3 pt)

$$F_n \geq \phi^{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

Hinweis: ϕ ist Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

Diese Zahlen erscheinen sehr häufig in der Natur. Zum Beispiel bei den Spiralen der Ananas, Kiefernzapfen, Sonnenblumen, X-Chromosom-Vererbung, etc.

Übung 4 (3 pt)

Gegeben sei eine beliebige Gruppe von Menschen. Der kleine Moritz, der in der Schule gerade die vollständige Induktion gelernt hat stellt nun folgende Behauptung auf: **Alle Menschen in dieser Gruppe sind gleich alt.**
Moritz argumentiert nun so: Die Behauptung gelte für jede Teilmenge von n (verschiedenen) Personen aus der Gruppe und damit für die gesamte Gruppe.
Zuerst betrachtet Moritz eine einzige Person P, es ist klar, dass P im gleichen Alter wie P ist (Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage ist für jede Menge von n verschiedenen Personen wahr (Induktionsannahme).
Nun zeigt er, dass es für jede Menge von $n + 1$ verschiedene Personen gilt: Sei $A = \{p_1, p_2, ..., p_{n+1}\}$ eine Menge von $n + 1$ Menschen. Er betrachtet die Untergruppen $A_1 = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ und $A_2 = \{p_2, p_3 ..., p_{n+1}\}$. Nach Induktionsannahme (angewandt auf A_1) hat er, dass die Menschen $p_1, p_2, ..., p_n$ im gleichen Alter sind, während er für die Induktionsannahme (angewandt auf A_2) hat, dass die Menschen $p_2, p_3 ..., p_{n+1}$ auch im gleichen Alter sind.
Durch die transitive Eigenschaft, sind alle $p_1, p_2, ..., p_{n+1}$ im gleichen Alter.
Was hat Moritz falsch gemacht?

Übung 5

Rechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen und dann schreiben Sie sie in Polarkoordinaten.

(a) (2 pt)

$$z = \frac{4i}{\sqrt{3} + i};$$

(b) (2 pt)

$$z = \frac{1}{3 + 3i};$$

Übung 6

Lösen Sie die folgenden komplexen Gleichungen.

(a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$; (2 pt)

(b) $z\overline{z} - z + \frac{i}{4} = 0$; (3 pt)