Übung 59

Berechnen Sie die Produkte AB und BA der Matrizen A und B, wenn dies möglich ist. (Jede Aufgabe 2Pkt.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \pi & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Übung 60

Seien $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 3)$ drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß

(a) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist; (2 pt)

(b) $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ nicht orthogonal zueinander sind. (2 pt)

(c) Berechnen Sie die Normen der Vektoren $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ und die Winkel zwischen den Paaren dieser Vektoren. (2 pt)

(d) Bestimmen Sie mit der Hilfe der Methode von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis des von $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ erzeugten Unterraums U des $\mathbb{R}^3$ und die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathbf{v}_3$ auf den Unterraum U. (3 pt)

Finden Sie eine Parameterdarstellung und eine Darstellung durch Gleichungen

(e) des Unterraums U; (3 pt)

(f) der Ebene parallel zu U mit Ortsvektor $\mathbf{v}_3$; (2 pt)

(g) der durch den Richtungsvektor $\mathbf{v}_3$ und Ortsvektor $\mathbf{v}_1$ definierten Gerade.(2 pt)

Übung 61

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) Seien $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Wenn $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$ gilt, dann ist $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ eine Basis; (2 pt)

(b) Jede Gerade im $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum von Dimension 1 des $\mathbb{R}^n$; (2 pt)

Übung 62

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $f(x,y,z) = (x+z, x-y+z)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch $g(a,b) = (a-b, a, b)$ definierten Abbildungen.

(a) Zeige, daß f und g linear sind. (2 pt)

(b) Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}$, so daß $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, und zeigen Sie, daß $Ker(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist. (3 pt)

(c) Bestimmen Sie die Matrizen A und B der linearen Abbildungen f und g bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^2$. (2 pt)

(d) Berechnen Sie einen Ausdruck für die linearen Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$ und deren Matrizen. Welches Verhältnis besteht zwischen diesen Matrizen und den Matrizen A und B? (3 pt)

Übung 63 (3 pt)

Zeigen Sie, daß es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodaß

$$f(1,1,1) = (0,1,0),\ f(-1,1,0) = (1,0,0),\ f(0,2,1) = (1,1,1).$$

Übung 64

Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind. Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$. (2 pt)

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. (2 pt)

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x+y+1, x-y)$ (2 pt).