Übung 10

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und finden Sie den Limes, wenn er existiert.

(a) $a_n = \frac{2n-3}{3n+1} + i \cdot \frac{2n^3-3}{n^3+1}$; (2 pt)

(b) $a_n = \frac{n^4-4}{n^5+(-1)^n n+12}$; (3 pt)

(c) $a_n = \frac{a^b n+\pi^2}{cn}$, (3 pt)
wobei $a =$ Ihr Alter, $b =$ mein Alter, $c =$ Anzahl der Studenten der TUGraz;

(d) $a_n = (-\frac{\pi}{3})^n$; (2 pt)

(e) $a_n = (-\frac{3}{\pi})^n$; (2 pt)

(f) $a_n = \sqrt{n^2-2} - n$; (3 pt)

(g) $a_n = (1 + (-1)^n)n^{(-1)^{n+1}}$; (3 pt)

(h) $a_n = (1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}$. *Hinweis* : Schreiben Sie (3 pt)

$$\frac{2}{n^2} = \frac{1}{\frac{n^2}{2}};$$

(i) $a_n = (1 + \frac{n+1}{n^2})^n$. (3 pt)

Übung 11

Sei

$$a_n = \pi(-1)^n - \frac{(-1)^{n+1} + n}{n^2}.$$

(a) Ist $\{a_n\}$ beschränkt? (2 pt)
(b) Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ monoton ist. (2 pt)
(c) Ist $\{a_n\}$ konvergent? (2 pt)
(d) Können Sie ohne Rechnung sagen, daß die Folge $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ enthält? (3 pt)
(e) Welche Häufungswerte hat $\{a_n\}$? (2 pt)

Übung 12 (4 pt)

Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Benutzen Sie die Definition des Limes, um zu zeigen, daß $\lim a_n = 0$. Finden Sie das kleinste N_ε, sodaß $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10000}$.

Übung 13 (4 pt)

Sei $\{a_n\}$ die Folge definiert durch

$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}.$$

(a) Zeigen Sie mit der vollständigen Induktion, daß $\{a_n\}$ monoton fallend ist.
(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Übung 14

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$; (3 pt)

(b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n+1}}$. (3 pt)

Übung 15 (4 pt)

Sei

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert.
(b) Entscheiden Sie, ob $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ konvergiert.