Übung 21
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.
(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(3+\frac{1}{n})^n}{n^2}$; (3 pt)

(b) $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(\pi n)(n+2)}{n^2-1}$; (3 pt)

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 e^{3n}}{(1+\frac{\pi}{n^2})^{n^3}}$; (3 pt)

Übung 22 (3 pt)
Seien $\{a_n\}$ eine Nullfolge und $\{b_n\}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, daß $\{c_n = a_n \cdot b_n\}$ eine Nullfolge ist.

Übung 23 (3 pt)
Sei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$ und seien $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die zwei Abbildungen $f(x) = -x^2 - 1$ und $g(x) = \sqrt{x}$.
(a) Sind f und g injektiv und surjektiv? Können Sie den Definitionsbereich und den Bildbereich so verändern, daß f und g bijektiv werden.
(b) Können Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ berechnen?

Übung 24
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen bijektiv sind. Wenn ja, finden Sie die Umkehrfunktionen. Andernfalls verändern Sie den Definitionsbereich und den Bildbereich so, daß die Funktion bijektiv wird. Dann bestimmen Sie die Umkehrfunktion.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-6}{2}$; (2 pt)

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 1$; (2 pt)

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$. (3 pt)

Übung 25
Finden Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen.
(a) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$; (2 pt)

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; (2 pt)

(c) $f(x) = \sqrt[6]{x^3 + 2x^2 - 1}$. (3 pt)

Übung 26
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind und begründen Sie Ihre Antworten.
(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann kann f nicht surjektiv sein. (2 pt)
(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion, dann ist f nicht beschränkt. (2 pt)
(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv und surjektiv, dann ist f monoton. (2 pt)
(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende (oder fallende) Funktion, dann ist f injektiv. (2 pt)

Übung 27 (4 pt)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ die durch $f(z) = |z|$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, daß f nicht injektiv und nicht surjektiv ist. Seien $r \in \mathbb{R}_+$ und $C_r = \{z \in \mathbb{C} : \ f(z) = r\}$. Wie sieht die Menge C_r in $\mathbb{C}$ aus? Finden Sie unendlich viele Mengen $G_t \subseteq \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, sodaß die Einschränkung der Funktion f auf G_t bijektiv nach $\mathbb{R}_+$ ist. Sind die Mengen G_t disjunkt? Dann entscheiden Sie sich für ein t, nehmen Sie die Menge G_t und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to G_t$.