

Übung 41 (3 pt)
Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f)$ der Funktion $f(x)$ und die Werte von a und b , damit sie auf $D(f)$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3+a}{x+1}, & \text{falls } x < 0; \\ b, & \text{falls } x = 0; \\ \frac{b \sin(x)}{ax}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übung 42 (3 pt)
Sei $f(x)$ eine Funktion, sodaß $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

für jede Funktion $g(x)$, die in einer Umgebung des Punkts x_0 stetig ist.

Übung 43 (3 pt)
Zeigen Sie, daß der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

nicht existiert. Ist die Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig auf ihrem Definitionsbereich?

Übung 44
Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2};$ (2 pt)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2)}{3x \sin(x)};$ (2 pt)

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan(x).$ (2 pt)

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\sin(x^2)}}.$ (2 pt)

Übung 45
Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f)$ der folgenden Funktionen und die Intervalle, auf denen sie positiv und stetig sind. Dann rechnen Sie die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ und die für $x \rightarrow x_0^{\pm}$, $x_0 \notin D(f)$ aus. Finden Sie auch deren Asymptoten.

(a) $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-1};$ (2 pt)

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3};$ (3 pt)

(c) $f(x) = \frac{-x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 1}$; (4 pt)

Übung 46 (3 pt)

Zeigen Sie, daß das folgende Polynom $x^4 - 3x^2 + x - 1$ (mindestens) eine Nullstelle x_0 zwischen $x = 0$ und $x = 2$ besitzt. Finden Sie durch das Bisektionsverfahren den Wert von x_0 mit einem Fehler kleiner als 0,05.

Übung 47 (4 pt)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$. Benutzen Sie die Definition von Grenzwert, um zu beweisen, daß

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$