Übung 48

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f)$ der folgenden Funktionen und die Intervalle, auf denen sie stetig sind. Dann rechnen Sie die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und die für $x \to x_0^{\pm}$, $x_0 \notin D(f)$ aus (wenn dies möglich ist). Finden Sie auch deren Asymptoten.

(a) $f(x) = \exp\left(\frac{-x}{|x-1|}\right)$; (3 pt)

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(|x|)}{x}, & \text{falls } x \neq 0; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$; (3 pt)

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-3}\right)$; (3 pt)

(d) $f(x) = \frac{x+|x|+3}{|x-1|-1}$; (3 pt)

Übung 49

Sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$ definierte charakteristische Funktion der Menge A. Bestimmen Sie die Punkte aus $\mathbb{R}$, für welche die Funktion $\chi_A(x)$ NICHT stetig/rechtsseitig/linksseitig-stetig ist, und bestimmen Sie, es sich um welche Art von Unstetigkeitstelle handelt, falls

(a) $A = [a, b]$; (2 pt)
(b) $A = (a, b)$; (2 pt)
(c) $A = [a, b)$; (2 pt)
(d) $A = (a, b]$. (2 pt)

Übung 50

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) Für jede Teilmenge A ist χ_A eine unstetige Abbildung; (2 pt)
(b) Wenn die Funktion χ_A unstetig ist, hat sie nur zwei Unstetigkeitsstellen; (2 pt)
(c) Die Punkte, für welche χ_A unstetig ist, sind Sprungstellen. (3 pt)

Übung 51 (3 pt)

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß es eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gibt, die in $[0, 1]$ kein Maximum und kein Minimum annimmt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Weierstaßsatz?

Übung 52

Entscheiden Sie, ob die folgenden Räume V Vektorräume sind (begründen Sie Ihre Antworten!).

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ mit den Operationen
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $a \cdot (x, y) = (ax, ay)$, $a, x, y \in \mathbb{R}$; (2 pt)

(b) $V = \{p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$ mit der Summe von Polynomen und dem Produkt mit einer reellen Zahl; (2 pt)

(c) $V = \{\{a_n\} : \ \{a_n\}$ ist eine reelle Folge$\}$, mit $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ und $c\{a_n\} = \{ca_n\}$, $c \in \mathbb{R}$. (2 pt)